$(\mu'_m, \mu'_s, \ldots, \mu'_s)'$, 分散共分散行列

$$\Sigma_a=\begin{pmatrix} \Sigma_m & e'_{k_a}\otimes\Sigma_{ms} \\ e_{k_a}\otimes\Sigma'_{ms} & I_{k_a}\otimes\Sigma_s+(e_{k_a}e'_{k_a}-I_{k_a})\otimes\Sigma_{ss} \end{pmatrix}$$

の $(p+qk_a)$-次元分布に従うとする．ただし，$e_{k_a}=(1,\ldots,1)'$, I_{k_a} は単位行列，$A\otimes B$ は行列 A, B のクロネッカー積とする．モデルに含まれるパラメータは，Konishi and Khatri (1990) の一般化推定量を用いて推定し，これを $\{\hat{\Sigma}_m, \hat{\Sigma}_s, \hat{\Sigma}_{ms}, \hat{\Sigma}_{ss}\}$ とおく．

遺伝的な要因を探るという観点からは，複数の特性に関して，(i) 親とその同胞間の関連性の程度，(ii) 同胞内の類似性の度合を定量的に評価する尺度が必要となる．ここでは (i), (ii) を各々 $\hat{\Sigma}_m^{-1}\hat{\Sigma}_{ms}\hat{\Sigma}_s^{-1}\hat{\Sigma}'_{ms}$ の最大固有値の平方根，$\hat{\Sigma}_{ss}\hat{\Sigma}_s^{-1}$ の最大固有値を用いて推定することを提唱した (Konishi et al. (1991))．さらに，多変量データの次元縮小という観点から，推定量 $\hat{\Sigma}_s$ に基づく主成分分析を研究し，関連する統計的推測理論の研究を行った．

参 考 文 献

Konishi, S. and Khatri, C.G. (1990). Inferences on interclass and intraclass correlations in multivariate familial data, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **42**, 561-580.

Konishi, S., Khatri, C.G. and Rao, C. R. (1991). Inferences on multivariate measures of interclass and intraclass correlations in familial data, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **53**, 649-659.

Small Diffusion の最尤推定量の漸近展開

吉 田 朋 広

確率過程 X がつぎの確率微分方程式で定まるとせよ．

$$dX_t=V_0(X_t,\theta)dt+\varepsilon V(X_t)dw_t, \qquad t\in[0,T], \varepsilon\in(0,1]$$
$$X_0=x_0.$$

ここで，θ は k 次元未知パラメータ，V_0, $V=(V_1,\ldots,V_r)$ はなめらかな既知の関数とする．未知母数 θ を観測 $\{X_t ; 0\leqq t\leqq T\}$ から推定したい．$\varepsilon\to 0$ のとき，最尤推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon$ は一致性を持ち，1次漸近有効であることが知られている．Malliavin calculus によって，バイアス修正された最尤推定量 $\hat{\theta}^*_\varepsilon(w ; \theta_0)=\hat{\theta}_\varepsilon-\varepsilon^2 b(\hat{\theta}_\varepsilon)$ に対して，その分布の漸近展開はつぎのように与えられる．θ_0 はパラメータの真値を表す．

定理． バイアス修正された最尤推定量 $\hat{\theta}^*_\varepsilon(w ; \theta_0)$ に対してつぎの漸近展開が成り立つ．

$$P\left[\frac{\hat{\theta}^*_\varepsilon(w ; \theta_0)-\theta_0}{\varepsilon}\in A\right]=\int_A p_0(x)dx+\varepsilon\int_A p_1(x)dx+\cdots, \qquad \varepsilon\downarrow 0, \quad A\in\boldsymbol{B}^k.$$

この展開は $A\in\boldsymbol{B}^k$ に関して一様．とくに，

$$p_0(x)=\phi(x ; 0, I^{-1}),$$
$$p_1(x)=\Big[\sum_{i,j,l} I^{ij}A_{ijl}\,x^l+\sum_{i,j,l} I^{ij}B_{ilj}\,x^l-\sum_{j,l} b^j(\theta_0)I_{jl}\,x^l$$
$$-\sum_{i,j,l} A_{ijl}\,x^ix^jx^l-\sum_{i,j,l}\frac{1}{2}B_{ijl}\,x^ix^jx^l\Big]\phi(x ; 0, I^{-1}),\ldots.$$

ここで，A_{ijl}, B_{ijl} は確率微分方程式の係数から定まる定数である．ϕ は正規分布の確率密度で，$I=(I_{ij})$ は Fisher 情報量，$I^{-1}=(I^{ij})$.

同様にして，尤度比統計量の漸近展開，contiguous alternative での最尤推定量と尤度比統計量の漸近展開，2次漸近中央値不偏推定量の2次の分布の限界とバイアス修正された最尤推定量の2次漸近有効

性，離散的な観測による 2 次漸近有効推定量の構成，small diffusion に関連のある汎関数の漸近展開などが示される．

修正情報量に関する不等式とその応用

松縄　規

修正情報量および関連する諸量についていくつかの不等式を与える．応用として Poisson binomial 分布の Poisson 近似を行なう．得られる結果は Chen-Stein method によるものに比肩でき，場合によってはより良い近似になる．

X および Y を可測空間 $(R, \boldsymbol{B})$ 上で定義される確率変数とする．ここに R は任意の抽象空間，$\boldsymbol{B}$ は R の部分集合の σ-集合体を表わす．X と Y に対応する確率分布をそれぞれ P^X, P^Y とし，$(R, \boldsymbol{B})$ 上で定義された σ-有限測度 μ に関する Radon-Nikodym 導関数を f と g, 各々の support を A, B とする．$R \supseteq B \supseteq A$ の条件の下での次の意味での確率分布間の近似の評価を考える：

$$D(X, Y; \boldsymbol{B}) \equiv \sup\{|P^X(E) - P^Y(E)|; E \in \boldsymbol{B}\}.$$

この距離を上記の設定で評価するために次の諸量を用いる：

$$I^*(X, Y; A) = \int_A f \ln \frac{f}{g}\, d\mu, \qquad V^*(X, Y; A) = \int_A |f - g|\, d\mu,$$

$$\rho(X, Y; A) = \int_A \sqrt{fg}\, d\mu.$$

これらの量を筆者が以前に与えた結果に適用することにより，目標とする距離 $D(X, Y; \boldsymbol{B})$ の大きさを評価するための種々の不等式を得る．例えば

Proposition.

$$\begin{aligned} D(X, Y; \boldsymbol{B}) &\leqq V^*(X, Y; A)/2 + 1 - P^Y(A) \\ &\leqq [(1 + P^Y(A))^2/4 - \rho^2(X, Y; A)]^{1/2} + 1 - P^Y(A). \end{aligned}$$

関連する結果として次の有用な不等式も成立する：

Lemma.　条件

$$\int_A \{\sqrt{g/f} - \rho(X, Y; A)\}^3 f d\mu < 0$$

が満たされるならば

$$\rho^2(X, Y; A) \geqq \sqrt{P^Y(A)} \exp(-I^*(X, Y; A)/2).$$

さて，測度空間 $(R, \boldsymbol{B}, \mu)$ が非負整数の集合 R，その部分集合全体の σ-集合体 $\boldsymbol{B}$ および R 上の計数測度から成っているとみなす．これにより上で得た結果等を利用して Poisson binomial 分布の Poisson 近似の誤差評価が可能である．$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立な Bernoulli 確率変数とし，

$$p_i = \Pr(X_i = 1)\ (i = 1, \ldots, n), \qquad \lambda = \sum_{i=1}^n p_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

とする．S_n に対応して T_n を平均が λ の Poisson 確率変数とする．このとき次の近似の評価が得られる：

Theorem.　$0 \leqq p_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$,　$n = 1, 2, \ldots$ に対して

(i)　$$\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \geqq D(S_n, T_n; \boldsymbol{B}) \geqq \underline{\gamma}_{n+1,\lambda} (> 0),$$

が成立する．ここに