とする．

3．母数の推定

全母数を $\boldsymbol{\xi}$ とするとき，尤度は，

$$L(\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p}[p_j(\theta_i)^{x_{ij}}\{1-p_j(\theta_i)\}^{1-x_{ij}} \times p_j(\eta_i)^{y_{ij}}\{1-p_j(\eta_i)\}^{1-y_{ij}}\times p(\theta_i,\ \eta_i\mid\rho_i)p(\rho_i)]$$

となる．相関 ρ_i は重要な情報であるが，θ_i，η_i，ρ_i を同時に推定することはできない．モデルが識別性を持つためには，全ての i について $\rho_i=\rho$ を仮定したり，あるいは，項目ごとに相関が変わるという意味で項目 j について ρ_j という母数を導入する（豊田，私信）ことが考えられるが，ここで報告する結果は次のような便宜的な方法によるものである．すなわち，ρ_i に関しては外部的に推定する．よく知られているように，2つの潜在変数が正規分布に従い，1-0的に単純な2分割に従って顕在変数化する場合，2つの潜在変数間の相関係数は四分相関係数によって与えられる．本モデルの場合，θ_i と η_i と x_{ij}, y_{ij} の間の関係はこのような簡単なものではないが，便宜上，ρ_i の推定値が四分相関係数によって与えられると仮定する．残りの母数 θ_i と η_i に関して積分し除去した関数を最大化することによって a_j，b_j，c_j，α_j，β_j の推定値を得る．θ_i と η_i に関する2重積分は数値的に処理し，最適化の方法として最急降下法を適用した．

4．適用例

統計学の多肢選択を16題作成し，56名の大学院生に適用した．上記の分析の結果，易しいが自信の持ちにくい項目とか，正答率は低いのに結構自信を持たれている項目等が識別され，項目作成上，出題系列の最適化等に有用な情報を与えることが分かった．

参考文献

下村　努（1988）．『教育評価手法』，教育情報科学，3，第4章，第一法規，東京．

Growth Curve Models with Fixed and Random Effects

広島大学 理学部　藤　越　康　祝

Rao（1959）とPotthoff and Roy（1964）によって導入されたgrowth curveモデルにおいては，$N\times p$ の観測行列 $\boldsymbol{X}$ に対して

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A\Xi B}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

が想定される．ここに，$\boldsymbol{A}:N\times k$, $\boldsymbol{B}:\ q\times p$（$q\leqq p$）はそれぞれ個体間，個体内計画行列，$\boldsymbol{\Xi}$：$k\times q$ は未知パラメータ行列，$\boldsymbol{\varepsilon}$：$N\times p$ は誤差行列である．誤差に対しては，通常 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の各行は互いに独立で平均ゼロ，共通の分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ をもつことが仮定される．典型的な $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_p \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{q-1} & \cdots & t_p^{q-1} \end{bmatrix}
$$

である．このモデルは経時測定データの解析等と関連しており，さらに，その拡充・発展がなされている（Verbyla and Venable（1988））．本報告では，以下で与えられる拡張モデルについて，それらの動機づけ，問題点等について報告した．

平均構造の拡張として，上記の構造を含めた次の（1）～（3）が考えられている．

(1) $$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A\Xi B}$$

(2) $$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Xi}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\eta}_2$$

(3) $$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Xi}_1\boldsymbol{B}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{\Xi}_m\boldsymbol{B}_m$$

ここに，$\boldsymbol{A}_i$：$N\times k_i$, $\boldsymbol{B}_i$：$q_i\times p$ はそれぞれ，個体間，個体内計画行列である．誤差ベクトルの分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ については

(i) $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\boldsymbol{I}_p$　　(ii) $\boldsymbol{\Sigma}>\boldsymbol{0}$

(iii) $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \rho \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$　　(iv) $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{p-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \rho \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$

が用いられている．パラメータがランダムである場合には，これらの分散行列にランダム効果分散構造が追加される．とくに，(i) との組み合せが重要である．この場合の growth curve モデルの分散構造は

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Delta B}+\sigma^2\boldsymbol{I}_p$$

となる．ここに $\boldsymbol{\Delta}$：$q\times q$ は半正定値行列である．

参 考 文 献

Potthoff, R.F. and Roy, S.N. (1964). A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problem, *Biometrika*, **51**, 313-326.

Rao, C.R. (1959). Some problems involving linear hypotheses in multivariate analysis, *Biometrika*, **46**, 49-58.

Verbyla, A.P. and Venable, W.N. (1988). An extension of the growth curve model, *Biometrika*, **75**, 129-138.