

ランダム・システムの活性化とべき分布*

東北大学 工学部 原 啓 明
東北大学 理学部 小 山 順 二

(1990 年 5 月 受付)

1. はじめに

統計物理学の発展によって、体系のマクロな性質は体系を構成する基本要素の素過程を通して明らかにされて来た。しかし、素過程によるマクロな性質の解明はまだ簡単な体系に限られている。地殻や神経回路網等の複雑な体系では、マクロな性質と基本要素の素過程の関係を導出するには、新しい概念や手法が要求され、その基本的な機構を解明することは今始まった新しいテーマである。

自然界には、空間的あるいは時間的な発展のパターンを生み出す複雑なシステムが多く存在している。一般に、これ等の図形化されたパターンには“特徴的な長さ”がなかったり、あるいは定義しにくい場合が多い。この特徴的な長さの欠如が体系を規定する本質的な性質の一つであると考え、ランダムパターンは自己相似性を持った体系の特性として理解される。つまり、地殻や神経回路網等のシステムは、特徴的な長さを欠く時空パターンを生み出す自己相似性の体系であるとみることが出来る。この立場では、複雑な体系の性質を、初めから特徴的な長さを持たないフラクタル構造で規定された体系としてとらえ、その理想化された体系でシステムの応答特性と観測結果との比較によって体系の構造や内部状態を調べる方法が考えられる。実際、複雑な不均質系の断層破壊が示す震源スペクトル(小山(1986))は、べき分布で規定された確率過程によって解析される(小山・原(1989a, 1989b))。また、金属やコンクリート等に発生したクラックの頻度分布(原・岡山(1987), Hara and Okayama (1988))、さらに外界の刺激に対する生体の応答特性等も、同様な問題設定によって議論される(嶋田 他(1989))。

一般に、理想系は大局的に一様な自己相似性であるとして規定するより、系の複雑さを局所的な自己相似性で規定するマルチフラクタル(Falconer (1990))的な構造であるとみる方が自然であろう。

本稿では、フラクタル構造をした基本素子の集合体であるクラスター集団を“ランダム・システム”の理想系として提案し、この体系の応答特性を調べる。すなわち、体系に外力を加え、各クラスターの内部状態を活性化し、この活性化のプロセスを系が示す応答特性として議論する。応答特性を表現する応答関数には、着目したクラスターと、その周辺にあるクラスター集団との相関を具体的にとり入れる。これは Weierstrass 関数を一般化したものに相当する。この定式化では、相関によって、応答特性の漸近形を規定するべき分布関数の指数はパラメータ化されることを示す。

* 本稿は、統計数理研究所 共同研究 (1-共会-51) における発表に基づくものである。

2. 理想系の構造と特性

地殻や神経回路網等の複雑な体系をモデル化した理想系を考える。体系は基本素子の集合体であるクラスターと、このクラスター集団で構成された複合系（原・岡山（1987），Hara and Okayama（1988））である。体系に外力を加えると、クラスターはその特性に応じて活性化されるものとする。また基本素子の集合体からできたクラスターの構造には、図1で示す自己相似性を仮定する。つまり1個のクラスターに着目し、有効半径 r 内の基本素子の集合体の質量を $M(r)$ とすると、クラスターの内部に関する自己相似性は

$$(2.1) \quad M(r) = aM\left(\frac{r}{b}\right) \quad (a, b > 1)$$

である（図1参照）。この構造のフラクタル次元は $d_s = \ln a / \ln b$ である。

また、外力を加えたときにクラスターの応答特性は、図2で示す時間発展のパターンによって表されるものとする。すなわち、時刻 t における活性化のパターン（状態変化）を関数 $E(t)$ で表し、(2.1) と同様な

$$(2.2) \quad E(t) = aE\left(\frac{t}{b}\right) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で、クラスターの応答特性が規定されるものとする。折線で表された $E(t)$ は、パターンが変化する区間を被覆する箱の数で定義された局所ボックス次元 $d_B = 2 - d_s$ によって規定される（Vicsek（1989））。 t の上限1は、クラスターの大きさで決まる特性時間 t_0 を規格化したものである。したがって、 $t \gg 1$ における $E(t)$ には、我々が着目したクラスターをかこむ周辺部のクラスター集団の分布構造が反映される。

理想系におけるクラスター集団の分布構造は、各クラスターを点であるとみなし、十分大きな半径 R の内部に含まれるクラスター集団の分布を考えて規定する。このようなクラスター集団の質量を $M_c(R)$ とする。また、クラスター集団の活性化は十分大きな時間 ($t > 1$) を考え、

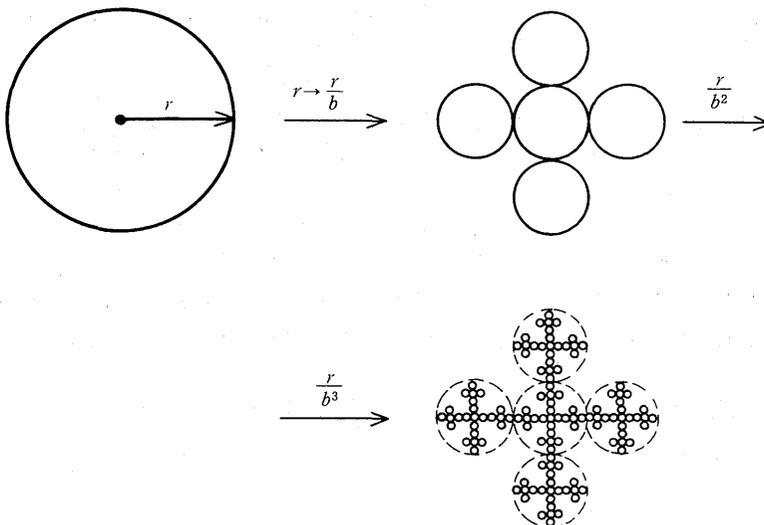


図1. 基本素子の集合体から構成されたクラスターの自己相似性。

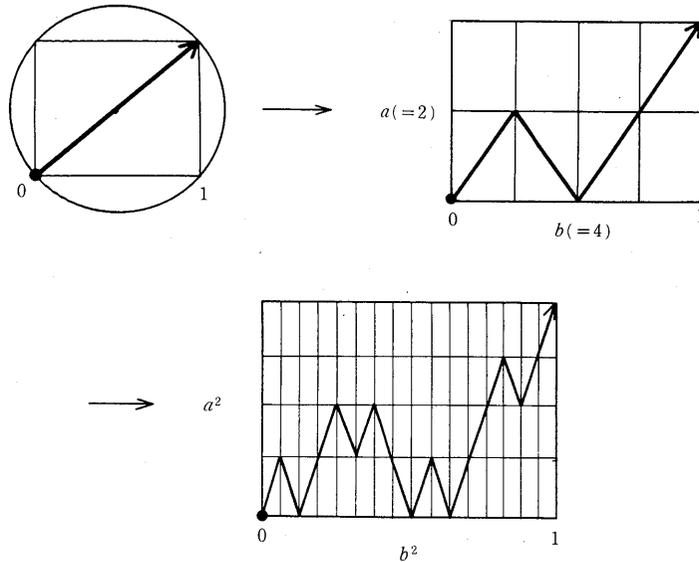


図2. 折線で表された“活性化”のパターン.

(2.2) に対応した関数 $E_c(t)$ で規定する. つまり, クラスタ-集団の分布構造と活性化は, $M_c(R), E_c(t) (t > 1)$ の関数方程式

$$(2.3) \quad M^{(c)}(R) = a^{(c)} M^{(c)}(R/b^{(c)})$$

$$(2.4) \quad E^{(c)}(t) = a^{(c)} E^{(c)}(t/b^{(c)}) \quad (t > 1)$$

によって規定される. ただし $a^{(c)}, b^{(c)} > 1$ である.

クラスタ-集団の分布構造を特徴付けるフラクタル次元は $D^{(c)} = \ln a^{(c)} / \ln b^{(c)}$, クラスタ-集団の活性化を特徴付ける局所ボックス次元は $D_b^{(c)} = 2 - D^{(c)}$ である.

半径 r 内に存在し状態 $E(t)$ にある基本素子数を E_0 個, t が t/b にスケール変換された状態に関与する基本素子数を E_1 個とする. また半径 R 内に存在し状態 $E^{(c)}(t)$ にあるクラスタ-数を $E_0^{(c)}$ 個, t が $t/b^{(c)}$ にスケール変換されたとき状態に関与するクラスタ-数を $E_1^{(c)}$ 個とする. 数値 $E_i (i=0, 1)$ と (2.2), 数値 $E_i^{(c)}$ と (2.4) を使って確率密度関数 $P(t) (= E(t)/E_0), P^{(c)}(t) (= E^{(c)}(t)/E_0^{(c)})$ を導入すると, (2.2) と (2.4) はそれぞれ

$$(2.5) \quad P(t) = \bar{a} P(t/b) \quad \left(\bar{a} = a \frac{E_1}{E_0} < 1 \right)$$

$$(2.6) \quad P^{(c)}(t) = \bar{a}^{(c)} P^{(c)}(t/b^{(c)}) \quad \left(\bar{a}^{(c)} = a^{(c)} \frac{E_1^{(c)}}{E_0^{(c)}} < 1 \right)$$

となる. ここで数値 $E_i, E_i^{(c)} (i=0, 1)$ は, $E_0 \gg E_1, E_0^{(c)} \gg E_1^{(c)}$ を満足し, $\bar{a}, \bar{a}^{(c)} < 1$ を満たすものとする.

3. 一般化されたランダム・ウォーク

いろいろ興味ある状態変化がランダム・ウォークによってモデル化されている. すなわち, ステップ N でウォーカーが“位置”(状態) m に存在する確率 $W(m, N)$ は次の漸化式

$$(3.1) \quad W(m, N) = \sum_{\alpha=\pm,0} P_{N-1}^{\alpha}(m | m - \alpha \cdot 1) W(m - \alpha \cdot 1, N - 1)$$

によって表される。 $P_{N-1}^{\alpha}(\cdot)$ は、ウォーカーがステップ $N-1$ で状態 $m - \alpha \cdot 1$ ($\alpha = +, -, 0$) から m へ遷移する確率である。規格化条件は

$$(3.2) \quad \sum_{\alpha} P_{N-1}^{\alpha}(m + \alpha \cdot 1 | m) = 1$$

を満足する。遷移確率 $P_{N-1}^{\alpha}(\cdot)$ を現象に適合した形で規定すれば具体的な状態変化がモデル化される。しかし非線型性を含む興味ある複雑な現象に対しては (3.1) と (3.2) だけで構成されたランダム・ウォーク (RW) の枠組をもっと拡張する必要がある。

RW を一般化する方法に、図 3 (a), (b) で示した $P_{N-1}^{\alpha}(\cdot)$ と $P_N^{\alpha}(\cdot)$ 間に一つの間係を、形式的な写像 F

$$(3.3) \quad F: P_{N-1}^{\alpha}(\cdot) \rightarrow P_N^{\alpha}(\cdot)$$

として導入する定式化がある (Hara (1979a, 1979b))。以下では、 F を状態間の $P_N^{\alpha}(\cdot)$ 軌道を規定する附帯条件として (3.1), (3.2) に加えたものを一般化されたランダム・ウォーク (GRW) と言うことにする。GRW では、(3.2) と (3.3) を同時に満たす $P_N^{\alpha}(\cdot)$ の関数形を具体的に規定することで (3.1) の漸化式が閉じた形で記述されたことになる。(3.1) で $M (> 1)$ ステップ前まで考慮した場合には、右辺はステップに関する和を含むものになる (Hara (1980))。

GRW で表現されたプロセスの性質を解析的に調べるには、漸化式 (3.1) の連続体近似 ($N \rightarrow t = Nt_0, K \rightarrow \tau_K = Kt_0, t_0$: きざみ巾) をとる。以下では簡単のため $P_{N-K}^{\alpha}(\cdot)$ が m に依存しない場合を考える。

クラスターのサイズで決まる特性時間 t_0 をきざみ巾とする。連続変数 $t (= Nt_0), \tau_K (= Kt_0)$ を導入し、きざみ巾 t_0 の関数 $w(m, t/t_0), P^{\alpha}(t/t_0 - \tau_K/t_0) (= P_{N-K}^{\alpha})$ を使って連続関数 $w(m, t), P^{\alpha}(t - \tau_K)$ を導入する。このとき、 $w(m, t)$ に関する漸化式は

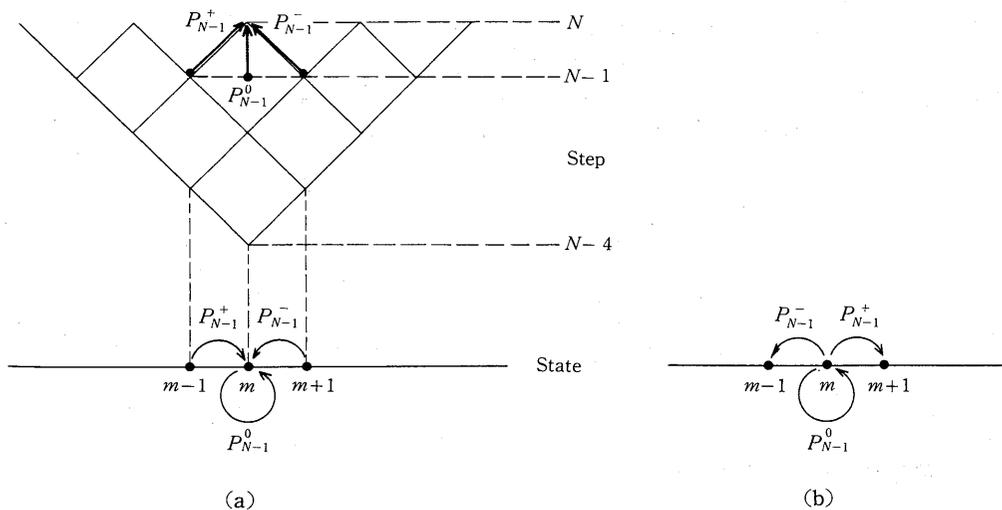


図 3. (a) ランダム・ウォークの遷移確率 $P_N^{\alpha}(\cdot)$ と、ステップ N でウォーカーが状態 m に存在する確率 $W(m, N)$. (b) 遷移確率 $P_N^{\alpha}(\cdot)$ の規格化条件。

$$(3.4) \quad w(m, t) = \sum_{K=1}^M \sum_{\alpha} P^{\alpha}(t - \tau_K) w(m - \alpha \cdot 1, t - \tau_K)$$

となる。同時に (3.2), (3.3) はそれぞれ

$$(3.5) \quad \sum_{K=1}^M \sum_{\alpha} P^{\alpha}(t - \tau_K) = 1$$

$$(3.6) \quad F: P^{\alpha}(t - t_0) \rightarrow P^{\alpha}(t)$$

である。

以下では、第2章で述べたクラスターの構造と特性を表現する $P^{\alpha}(t)$ の関数形を具体的に与える。

4. クラスタとクラスタ集団の応答

本章では、GRW の基本的枠組 (3.4)~(3.6) によって、外力に対する理想系の応答をモデル化する定式化について述べる。

時刻 $t = \tau_K$ で系に外力を加え、我々が着目したクラスターの応答を調べる。(3.4) は M 個のクラスターの効果を取り入れた漸化式とみることが出来る (図4参照)。(3.4) で $\alpha = 0$ 以外は 0 であるとする、漸化式 (3.4) は外力が加わったときの系の状態が同じ不変な状態に保たれるプロセスを表す。すなわち

$$(4.1) \quad w(m, t) = \sum_{K=1}^M P^0(t - \tau_K) w(m, t - \tau_K) \left(\sum_{K=1}^M P^0(t - \tau_K) = 1 \right)$$

である。 $P^0(t - \tau_K)$ は入力 $w(m, t - \tau_K)$ に対するクラスターの応答関数である。このクラスターに関する遷移確率は、過去にさかのぼり番号付けられた時間 (K ステップ以前) からの遷移確率とみることが出来る。これを以下では外力に対する系の“応答関数”と言うことにする。

クラスター K に着目する。このクラスターには (2.1), (2.2) で規定された基本素子の集合体が含まれている。また、クラスター K に周辺部から影響を与えるクラスター集団は (2.3), (2.4), (2.6) で規定されている。クラスターの自己相似性の構造を表す (2.5) に注意し、応答関数 $\Phi_K(t) (\equiv P^0(t - \tau_K))$ は

$$(4.2) \quad \Phi_K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,K}^0(t) \quad (P_{n,K}^0(t) \equiv P_n^0(t - \tau_K/b_K^n))$$

と表されるものとする。添字 K はクラスター K に関する量であることを示す。 b_K^n はスケリングのステージ “ n ” におけるスケール因子である。クラスター K に直接影響を与える周辺部のクラスター集団を考え、以下では、 $P_{n,K}^0(t)$ の関数形が、(3.6) の F の具体的なモデルで求められることを示す。記号を簡単にするため $P_{n,K}^0(t)$ の肩字 0 と添字 K を省く。

$P_n(t) (\equiv P_{n,K}^0(t))$ に関する F のモデルは、次の2条件

$$(4.3) \quad F1^{\circ}: P_1(t + \delta t_0) = [1 - \phi(\epsilon t) \delta t_0] P_1(t) \quad (\epsilon: \text{小さなパラメーター})$$

$$(4.4) \quad F2^{\circ}: P_n(t) = \tilde{a}_0 \tilde{b}_{\epsilon} P_{n-1}(\tilde{b}_{\epsilon} t) \quad (n \geq 1) \\ (\tilde{b}_{\epsilon} (\sim 1/b), \tilde{a}_0 (\sim \bar{a}b: \text{式(2.5)}) < 1)$$

で規定されると仮定する。ただし $\tilde{a}_0, \tilde{b}_{\epsilon}, P_0(\tilde{b}_{\epsilon} t)$ は以下で規定されるパラメーターと関数であ

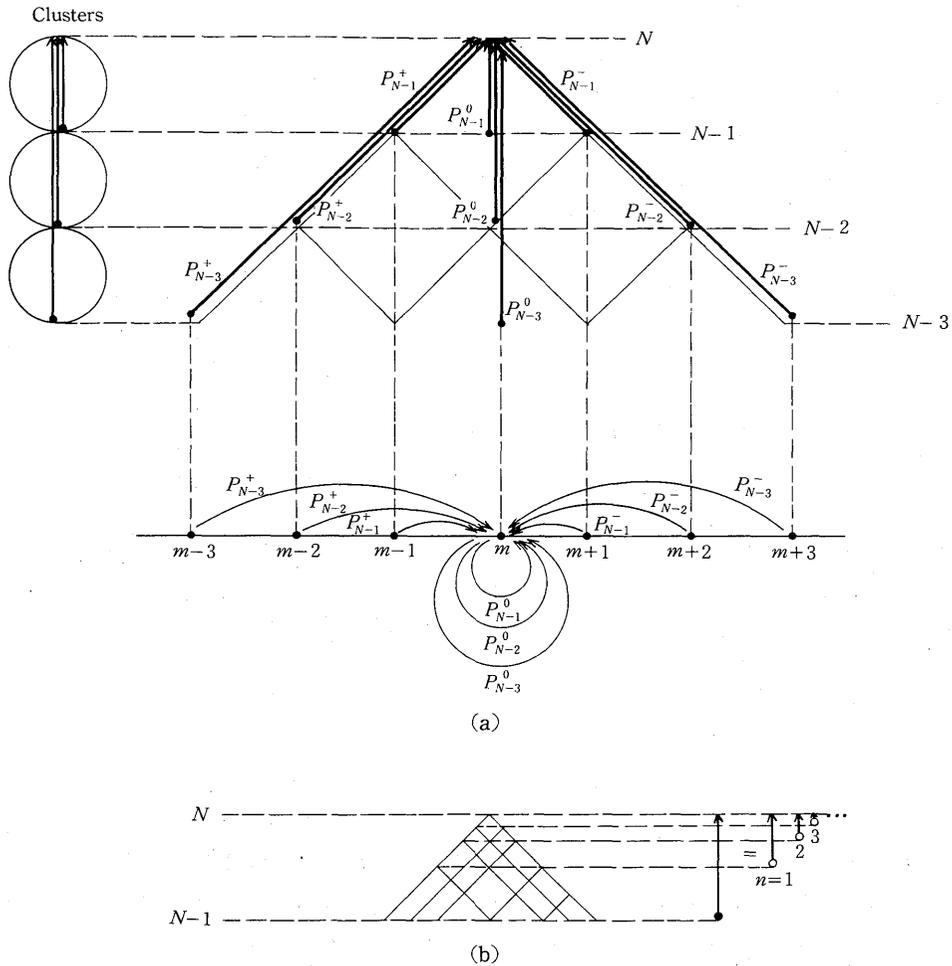


図4. (a) クラスタを点とみて状態が変わるプロセス。つまり、時間を逆にさかのぼって番号付けられた M 番目までのクラスタの状態からの遷移確率 ((4.1) 参照)。 (b) クラスタを構成する基本素子の集合体による自己相似性を考慮した遷移確率 ((4.2) 参照)。

る。 $F1^\circ$ は自己相似性で規定された基本素子の集合であるクラスタの時間発展を表す。 δt_0 は大きな n で決まる τ_K/b^n よりも十分小さなきざみ巾である。 $\phi(t)$ はゆっくり変化する関数である。 すなわち $P_i(t)$ で表されたクラスタに影響を与える周辺部にあるクラスタ集団の効果をも $\phi(t)$ を通じて (2.4) と共形の関数方程式

$$(4.5) \quad \phi(t) = a^{(c)} \phi(t/b^{(c)}) \quad (a^{(c)} = [b^{(c)}]^\mu, a^{(c)}, b^{(c)} > 1)$$

でとり入れる。 $F2^\circ$ はステージ n と $n-1$ 間のスケール則を表す。 スケーリング因子 \tilde{a}_0 は、(4.3) を $\delta t_0 \rightarrow 0$ として得られる微分方程式の解

$$(4.6) \quad \begin{aligned} P_i(t) &= \tilde{a}_0 g_0(\tilde{b}_\epsilon t) \\ g_0(\tilde{b}_\epsilon t) &= e^{-b_\epsilon t} \end{aligned}$$

の初期値 (< 1) である。 \tilde{b}_ϵ は ϕ の“平均値”

$$(4.7) \quad \tilde{b}_\epsilon = \frac{1}{t} \int_0^t \phi(\epsilon t') dt' < 1$$

である。(4.5)を考えて(4.7)を解くと \tilde{b}_ϵ は $A\epsilon^\mu t^\mu / (1+\mu)$ ($A < 1$): 定数, $\mu = \ln a^{(c)} / \ln b^{(c)}$) となる。 $a^{(c)}, b^{(c)}$ の値で決まる μ の値によって, $\mu=0$ であるとき(4.6)はポアソン過程, $\mu=1$ であるときガウス過程, また, $\mu=-1$ であるときべき過程となる。(4.6), (4.4)を(4.2)に代入し, 規格化された $\Phi_K(t)$ を求めると, $\psi_K(t)$ は

$$(4.8) \quad \psi_K(t) dt = \frac{1}{\Omega} \Phi_K(t) dt \quad \left(\Omega = \sum_{K=1}^M \Phi_K(t) \right)$$

$$(4.9) \quad \Phi_K(\tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_0 \tilde{b}_\epsilon)^n e^{-\tilde{b}_\epsilon \tilde{t}} / \tilde{b}_\epsilon \quad (\tilde{t} = t / \delta t_0)$$

で与えられる。ただし $\tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon < 1$ である。

遷移確率密度関数 $\psi_K(t)$ は1個のクラスターに着目したときの応答関数である。この関数には $\phi(t)$ を通じて, 周辺部のクラスターの影響がとり入れられている。式(4.9)は $\mu=0$ において \tilde{b}_ϵ が定数となる場合を含み, この時 $\Phi_K(t)$ は Weierstrass 関数 (Shlesinger and Hughes (1981)) を与える。

5. 応答関数の漸近形

応答関数 $\psi_K(t)$ (あるいは $\Phi_K(t)$ ((4.8) と (4.9) 参照)) の漸近形を求めるために, 次の変形を行う。

$$(5.1) \quad \psi_K(\tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} G(n)$$

$$(5.2) \quad G(n) = e^{n \ln \tilde{a}_0 \tilde{b}_\epsilon - \tilde{b}_\epsilon \tilde{t}} (\equiv e^{f(n)})$$

ここで $\tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon < 1$ に注意すると $f(n)$ に含まれる第1項は n の関数として減少関数, 第2項は t に依存する n の増加関数である。したがって $f(n)$ には最大値を与える n_0 が存在する。図5は $f(n)$ の n 依存性を示す。 $f'(n_0)=0$ で決まる n_0 は $(t, \tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon)$ の関数である:

$$(5.3) \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{\delta t_0} \frac{e^{n_0 \ln \tilde{b}_\epsilon}}{1+\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{\ln \tilde{a}_0}{\ln \tilde{b}_\epsilon} \right).$$

したがって, n_0 は $t, \tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon$ の関数 q

$$(5.4) \quad n_0 = q(t, \tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon)$$

として与えられる。

理想系として考えたランダム・システムの活性化を応答関数で調べるためには, 我々が着目したクラスターごとの結果を考える必要がある。簡単のため, 各クラスターの応答特性を表す $\tilde{a}_0, \tilde{b}_\epsilon$ は共通であるとする。しかし各クラスターが外力を受け活性化に寄与する時刻の分布は, t_1, t_2, \dots, t_k であるとする。この分布は(5.4)の関数 q を通じて $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(k)}, \dots$ の分布で表される。 $\{n_0^{(i)}\}$ の分布が, 平均値 n_0 のまわりに巾 Δ で広がったコーシー分布

$$(5.5) \quad \rho_\Delta(n - n_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{(n - n_0)^2 + \Delta^2}$$

であると仮定すると, このランダム・システムの応答関数はクラスター集団の分布の重みを考

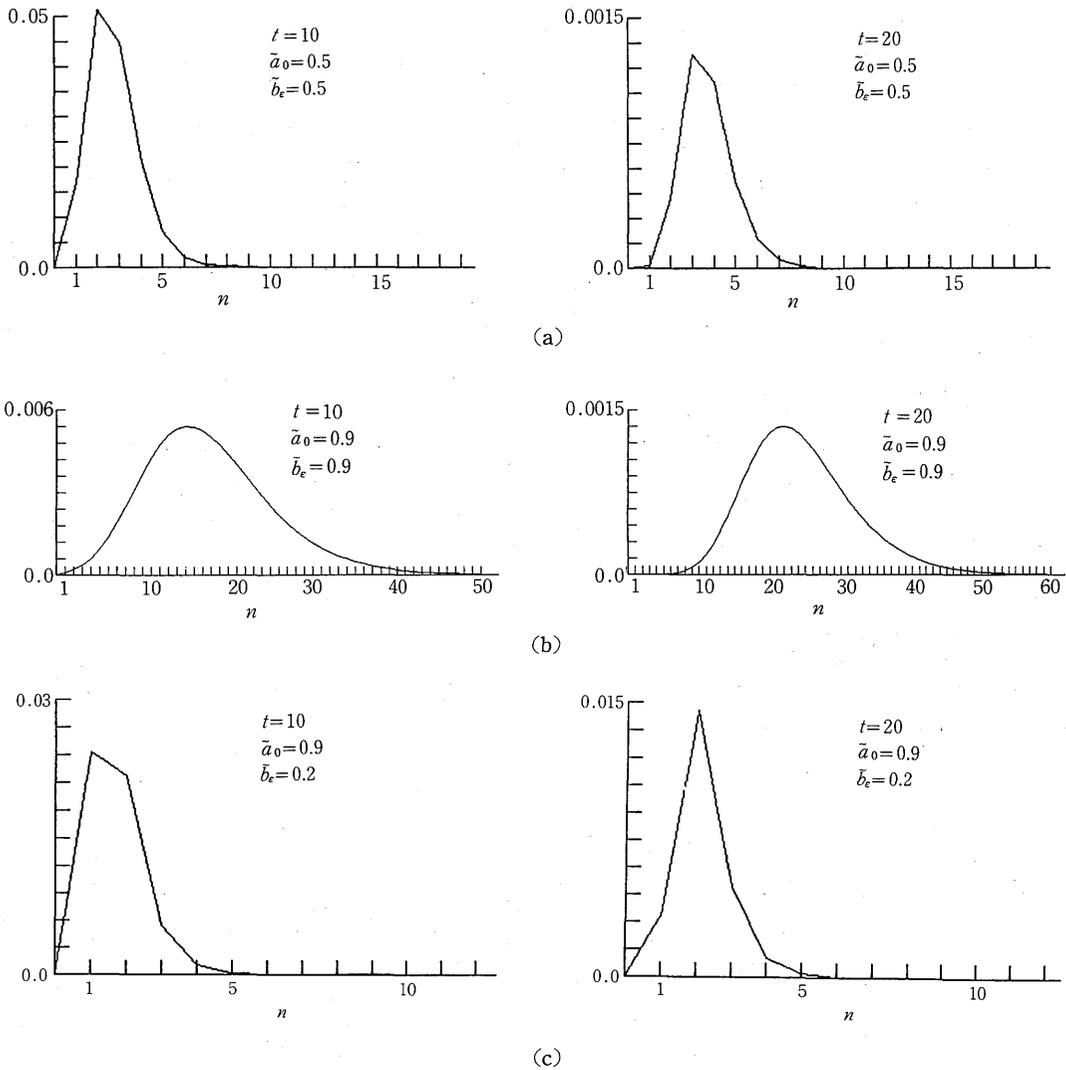


図5. (a)~(c): 関数 $G(n)=\exp(f(n))$ の変化. t を大きくすると $G(n)$ を最大にする n_0 は大きくなる. 図で示す $G(n)$ の変化には \tilde{b}_e の t 依存性は無視されている.

慮した“平均操作”で表される:

$$(5.6) \quad \psi(t, \Delta) (\equiv \langle \psi_K(t) \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} G(n) \rho_{\Delta}(n - n_0).$$

(5.6) で $\Delta \rightarrow 0$ の極限をとると, 周辺に分布するクラスター集団の効果は無視され, (5.1) を $G(n)$ の最大値 n_0 ((5.3) 参照) で評価する“1体近似”による結果

$$(5.7) \quad \psi(t, 0) \sim \Gamma_0 t^{-1-\gamma} \quad (\Gamma_0 = (1+\gamma)^{1+\gamma} e^{-(1+\gamma)})$$

が得られる. これと似た応答特性は動物の摂食行動の解析で観測されている(嶋田 他(1989)). $\Delta \neq 0$ に対する (5.6) の評価を行うため, 図6で示す1周積分 C_0 によって (5.6) の右边を変

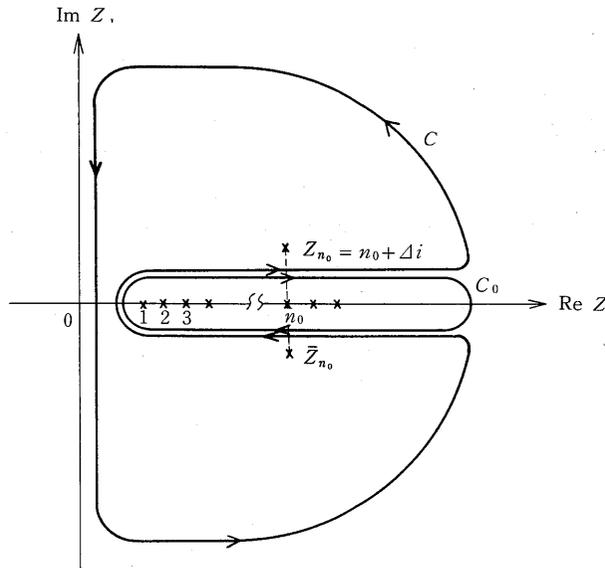


図6. 複素 n 平面による (5.8) の積分表示. 1 周積分 C_0 は $\cot \pi n$ の極をかこむ. C は虚軸に沿った部分と右半面の大半の寄与を加えたものである.

形する.

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad \phi(t, \Delta) &= \frac{i}{2} \oint_{C_0} \cot \pi n G(n) \rho_\Delta(n - n_0) dn \\
 &= \frac{i}{2} \int_{\epsilon_0 - i\infty}^{\epsilon_0 + i\infty} \cot \pi n G(n) \rho_\Delta(n - n_0) dn \\
 &\quad + \frac{i}{2} [\cot \pi Z_{n_0} G(Z_{n_0}) - \text{c.c.}] \\
 &\hspace{15em} (Z_{n_0} = n_0 + \Delta i, \text{ c.c. : 共役複素})
 \end{aligned}$$

$|n| \rightarrow \infty$ において, (5.8) の右辺では $\cot \pi n$ の発散にくらべ $G(n)$ が十分速く 0 に近づくことに注意すると, 1 周積分は C_0 から C に変形される (図6 参照). 十分小さな Δ に対する $\phi(t, \Delta)$ の漸近形の主要項は (5.8) の右辺の第二項から求められ, 結果は

$$(5.9) \quad \phi(t, \Delta) \sim \frac{1}{\Delta} \Gamma_0 t^{-1-\gamma} e^{-t} \sin\left(\Delta |\ln \tilde{b}_\epsilon| (1+\gamma) + \frac{\pi}{2}\right) + O(\Delta) \quad (\Delta < 1)$$

となる. すなわち, クラスターの応答特性の分布が与える効果は $t^{-1-\gamma}$ に対する“振動する振巾”として表される. また t の負べき γ ((5.3) 参照) には \tilde{b}_ϵ ((4.7) 参照) を通じてパラメータ化された弱い t 依存性がある.

6. おわりに

本稿では, 体系の複雑さを考慮して, いろいろな自己相似性で系の構造を規定する方法を定式化した. この複雑なシステムに対する理想系として, “ランダム・システム”を提案し, この系に外力を加えたときの動的特性を具体的に調べた.

ランダム・システム(RS)は, 自己相似性を持った基本素子の集合体であるクラスターと, 別

の自己相似性で分布が規定されたクラスター集団によって構成された系である。系に外力を加えたときの応答特性は、一般化されたランダム・ウォーク (GRW) の遷移確率によって定義された応答関数 $\psi(t, \Delta)$ で解析を行った。この応答関数は一般化した Weierstrass 関数の形式で得られている。この関数には応答を調べるクラスター集団の分布による効果が具体的にとり入れられている。また、 $t \rightarrow \infty$ における $\psi(t, \Delta)$ の漸近形を特徴付ける負のべき指数 γ には、 \tilde{b}_e を通じてパラメータ化されたゆるやかな時間変化が含まれている。したがって、べき分布における負の指数自身が t 依存性を示す。この点は、本稿で述べたランダム・システムがいろいろ興味ある現象に対して一つの理想系となり得ることを示唆している。たとえば具体的な現象として、生体の活動度におけるリズム問題をべき分布で調べる実験(磯野 他(1990))がある。本稿のモデルによって、生体リズムによる活動度を示すべき分布の変化を素過程から理解する一つの手がかりが期待されている。

謝 辞

東北大学工学部 高橋 醇先生には第5章の漸近形の評価に関して貴重な助言をいただいた。また、理想系のモデルに関して、東北大学応用情報研究所の塚原保夫先生、磯野邦夫先生にはいろいろ有益なコメントをいただいた。

参 考 文 献

- Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester.
- Hara, H. (1979a). Generalization of the random-walk process, *Phys. Rev. B*, **20**, 4062-4068.
- Hara, H. (1979b). Spatial structure and stability based on random walks, *Z. Phys. B*, **32**, 405-411.
- Hara, H. (1980). Transformation of recursion relations for generalized random walks, *Z. Phys. B*, **39**, 261-267.
- 原 啓明, 岡山誠司(1987). ランダム媒質中におけるクラックの成長モデルとサイズ分布, 『数理地震学(II)』(斉藤正徳 編), 統計数理研究所, 東京.
- Hara, H. and Okayama, S. (1988). Fractal dimension and scaling behavior of cracks in a random medium: frequency rank distribution described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **37**, 9504-9511.
- 磯野邦夫, 尾田義治, 伊藤彰則, 本郷 哲, 宮内雅夫, 原田 敦, 武蔵昭一, 塚原保夫(1990). 生体概日周期活動の長期自動記録とその解析システム, 応用情報学研究年報, **15**, 155-166.
- 小山順二(1986). 破壊の物理モデル, 『数理地震学』(斉藤正徳 編), 46-59, 統計数理研究所, 東京.
- 小山順二, 原 啓明(1989a). ランダム波動のフラクタルスペクトル構造, 地震, **42**, 1-12.
- 小山順二, 原 啓明(1989b). 断層パッチのサイズ分布と不均質断層の震源スペクトル構造, 地震, **42**, 475-484.
- 嶋田一郎, 川添良幸, 原 啓明(1989). ショウジョウバエの摂食行動のフラクタル性, 動物生理, **6**, 101-107.
- Shlesinger, M.F. and Hughes, B.D. (1981). Analogue of renormalization group transformations in random processes, *Physica A*, **109**, 597-608.
- Vicsek, T. (1989). *Fractal Growth Phenomena*, World Science, Singapore.

Activations of Random System and Its Power Distribution

Hiroaki Hara

(Faculty of Engineering, Tohoku University)

Junji Koyama

(Faculty of Science, Tohoku University)

Based on an ideal system under an external force, the dynamical processes of activations are studied. The ideal system is a random system composed of sets of clusters, characterized by a distribution having a self-similarity. The cluster is an aggregation of fundamental units strongly correlated, and specified by another self-similarity. To describe the dynamical processes under the external force, the recursion relations of generalized random walks (GRW) (Hara (1979)) are utilized. By transition probabilities of GRW, a response function $\psi(t)$ is introduced to describe characteristic temporal behavior of the system. It is found that the response function leads to a generalization of the Weierstrass function. The temporal behavior of $\psi(t)$ is expressed by a power distribution specified by an index, that is a fractal dimension. The index itself shows slowly varying temporal behavior parametrized by a small parameter ε . Expressed differently, a fractal dimension is obtained in a multifractal form for the temporal behaviors.