

## 公開講演会要旨

# 地震の検出率とマグニチュード分布の 時空間的变化

統計数理研究所 尾 形 良 彦

(1991 年 11 月 6 日, 統計数理研究所 講堂)

### 1. はじめに

地震の震源カタログデータは、ほとんどの地震国における関係機関や国際機関によって定期的に公表されている。データの種別は震央位置、深さ、発生時刻、マグニチュードなどである。日本全国にわたる地震観測は気象庁が担当している。気象庁編集による地震の震源カタログ(1926-現在)の内容を見るとすぐ分かるのは、年代が進むに連れて収録されている地震の数が多くなっていることである。特に最近 10 年の地震数の増加は著しい。これは地震活動が高まってきたからでなく、小さい地震が検出されて、地震の数が増えているからである。また地域的にも地震の多いところとそうでないところがある。これも地震活動が高いためとは限らない。地震計のネットワークが密で良く整備されている地域とそうでないところ、内陸部と沖合いの地域などでは、検出率が大いに異なるからである。こういった関係を定量化して各時期、各地域の検出率や真の地震活動を調べるには、地震の大きさ分布についての経験法則を踏まえた統計モデルが必要である。

図 1 (a) は 1979 年から 83 年の 5 年間にわたって検出された全ての地震のマグニチュードデータのヒストグラムである。明らかに非対称なこの分布の生成過程を理解するには図の縦軸を対数スケールで見るとよい (図 1(b))。図 1(b) の + 印のプロットは、マグニチュードの大きい順からの、地震の累積個数を示している。これを見ると、全ての地震が完全に検知される範囲では各記号が二つの平行な直線の上に並んでいるのが分かる。すなわちマグニチュード  $M$  が下がるに連れて地震の数  $N$  が指数的に増えることを示している (Gutenberg and Richter (1944))。これは Gutenberg-Richter の法則と呼ばれ

$$\log_{10} N = a - bM$$

と書かれている。ここで係数  $b$  は片対数グラフの直線の傾きである。また Gutenberg and Richter (1954) は、 $b$ -値が世界各地で異なる値をとることを示している。この値は日本各地でも異なり、同じ場所の地震活動でも時間的に異なる値をとり得ることが知られている。特に、 $b$ -値の時間変化はその地域の応力場の変化を反映していると考えられ、地震予知の有用な情報を与えているのではないかと期待を持たれている。

マグニチュード分布の片対数プロットが直線から下に外れるところは、そこより小さいマグニチュードでは部分的にしか地震が検出されていないことを示している。そして直線に乗っている限りのマグニチュードの範囲では、ほぼ完全に地震が検出されていることを示し、その境界マグニチュードが地震の検出力を示していると考えられてきた。例えば気象庁では日本近辺

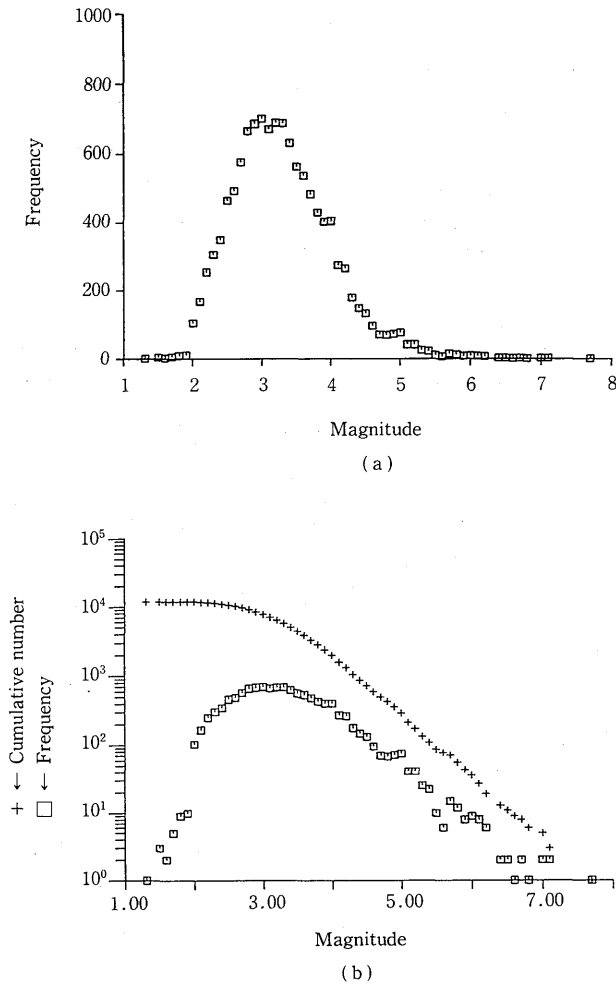


図1. JMA hypocenter data 1979~83.

を適当にブロック分割して、各ブロックのマグニチュード累積分布の片対数プロットから完全検出マグニチュードの下限を求め、この下限マグニチュード値の地域的分布の等高線を引いてその時期の気象庁ネットワークの検出力を示している(望月 他(1978), など)。これらによると、当然ながら概ね内陸部が高く、沖合いに行くに連れて検出率が低下している。

## 2. 点過程モデル

ここで私の点過程モデルを示す。図2(a) および (b) は、マグニチュード軸上に定義された、Gutenberg-Richter の法則どおりの地震の発生率曲線。地震の検出率は点過程の「thinning」で表現できる。実際に発生している地震の中で検出されたものの割合はマグニチュード  $M$  によって高くも低くもなり、この検出率関数として正規分布の累積分布関数  $q(M|\mu, \sigma) =$

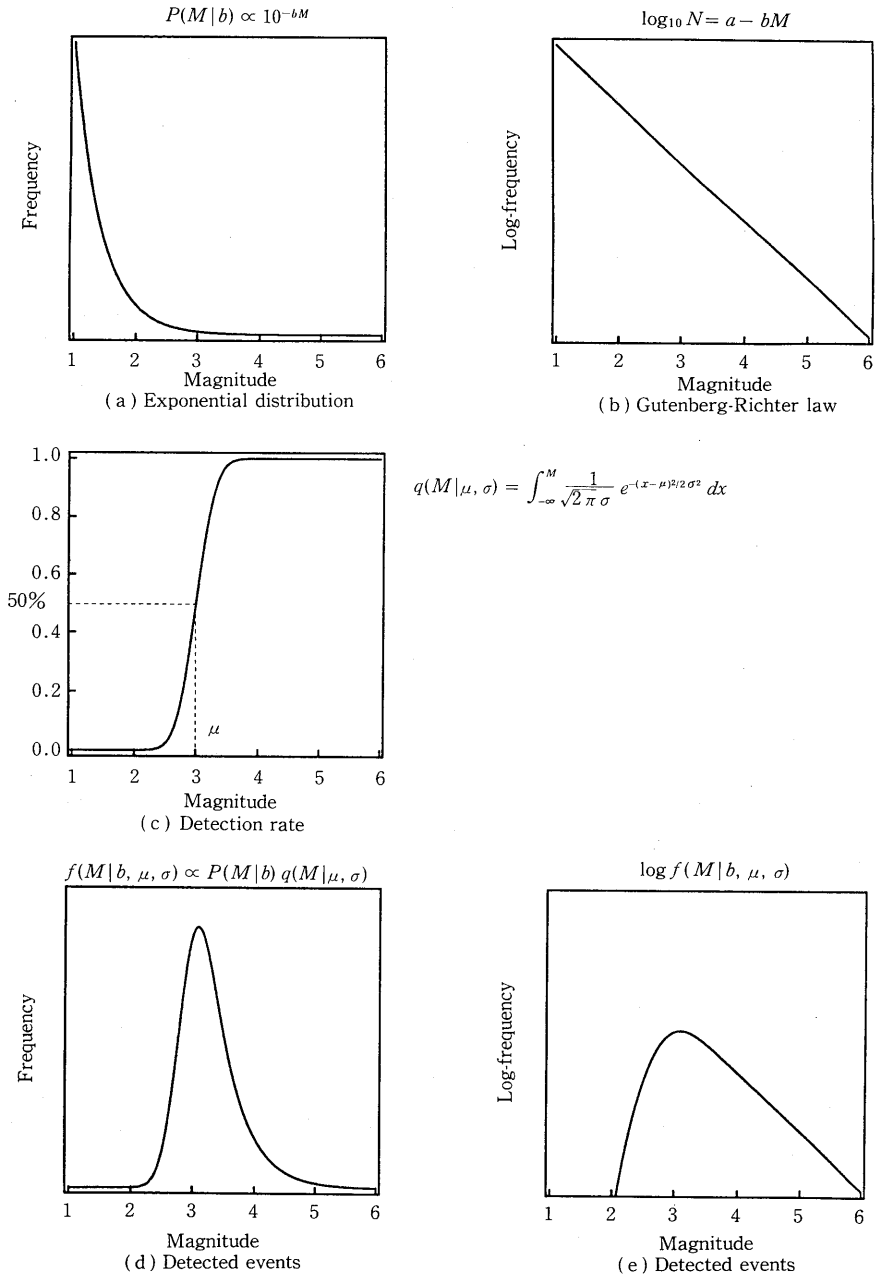


図2. モデルの模式図.

$\int_{-\infty}^M (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \exp\{- (x-\mu)^2 / (2\sigma^2)\} dx$  を考える. 平均値  $\mu$  は 50% 検出率を期待されるマグニチュード, 標準偏差  $\sigma$  は部分的にのみ検出されているマグニチュードの範囲に関するパラメータを示す (図 2(c)). Thinning によって得られる検出された地震の確率密度関数は

$$f(M | b, \mu, \sigma) = \frac{10^{-bM} q(M | \mu, \sigma)}{\int_{-\infty}^{\infty} 10^{-bM} q(M | \mu, \sigma) dM}$$

で与えられる。このようにして得られた分布 (図 2(d)) とその対数スケール図 (図 2(e)) が各々、図 1(a) および 1(b) に良く似ていることを認めていただけると思う。

マグニチュードのデータ  $\{M_i; i=1, 2, \dots, N\}$  が与えられているとする。仮にパラメータ  $b, \mu, \sigma$  が定数であるなら対数尤度関数は

$$\log L(b, \mu, \sigma) = \sum_{i=1}^N \log f(M_i | b, \mu, \sigma)$$

となり、これを最大化することで最尤推定値を求めることができる。しかしながら、地震カタログの長期間にわたるデータを見れば、これらのパラメータが定数であり得ないことは明白である。今これらのパラメータが時間  $t$  について依存していることを考える。つまり関数  $b(t), \mu(t)$  および  $\sigma(t)$  が何らかの基底  $F_k(t), k=1, 2, \dots, K$ , によって、次のように展開されているとする。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \log b_{\theta_1}(t) = \sum_{k=1}^K a_k F_k(t) \\ \varphi_2(t) &= \mu_{\theta_2}(t) = \sum_{k=1}^K b_k F_k(t) \\ \varphi_3(t) &= \log \sigma_{\theta_3}(t) = \sum_{k=1}^K c_k F_k(t) \end{aligned}$$

ここでは等間隔節点で分けられた 3 次 B-スプライン (例えば、井上 (1985) 参照) を考える。すると、その係数パラメータ

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (a_1, \dots, a_K; b_1, \dots, b_K; c_1, \dots, c_K)$$

に対応する対数尤度は

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log f(M_i | b_{\theta_1}(t_i), \mu_{\theta_2}(t_i), \sigma_{\theta_3}(t_i))$$

と書ける。さて、何らかの方法で検出率関数の成分  $\mu(t)$  と  $\sigma(t)$  が分かったとすると 100p% の検出率を期待できるマグニチュードの関数は

$$(2.2) \quad d_p(t) = \mu(t) + \gamma_p \sigma(t),$$

で与えられる。ここに  $\gamma_p$  は標準正規分布のいわゆる  $p$ -値である。これに、さらに  $b$ -値変動,  $b(t)$ , が与えられていれば、検出された全ての地震の時間変化のデータからマグニチュード帯 ( $M, M + dM$ ) での真の地震発生率の推定値を与えることが可能である。

### 3. 客観的ベイズ法

$b(t), \mu(t), \sigma(t)$  の関数を表現するパラメータが大量に必要なとき対数尤度関数は最大値を持たないことが多いばかりか、持っても最尤推定値で表現されたスプライン関数はきわめて凸凹した不明瞭なものになる。これを避けるための常套手段は、スプライン関数のラフネス (凸凹) に次のようなペナルティ汎関数を考えて、これらなるべく小さくなるようにして  $b(t), \mu(t), \sigma(t)$  の推定関数にある程度の滑らかさを保つように制約するというものである。

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\theta_1 | w_1, w_2) &= \int_0^T w_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 + w_2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right)^2 dt \\
 \Phi_2(\theta_2 | w_3, w_4) &= \int_0^T w_3 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right)^2 + w_4 \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right)^2 dt \\
 \Phi_3(\theta_3 | w_5, w_6) &= \int_0^T w_5 \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \right)^2 + w_6 \left( \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \right)^2 dt
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

ここで、 $w_1, \dots, w_6$  は課されるペナルティの強さを制御する重みである。例えば  $w_1$  を大きくとれば  $\varphi_1(t)$  は定数、 $w_2$  を大きくとれば  $\varphi_1(t)$  は傾きが任意であるが直線となる。この重みを適切に与え、ペナルティ付き対数尤度関数 (Good and Gaskins (1971))

$$Q(\theta | w_1, \dots, w_6) = \log L(\theta) - \sum_{j=1}^3 \Phi_j(\theta_j | w_{2j-1}, w_{2j})
 \tag{3.2}$$

を最大化するパラメータ  $\theta$  が推定値を与えるのである。このようにして不必要な凸凹が取り除かれたスプライン関数  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , そして  $\varphi_3(t)$  が得られる。かくして、重み  $w_1, \dots, w_6$  の適切な決め方の問題が浮上してくる。

Akaike (1980) はペナルティ付き対数尤度関数の最適化問題をベイズ推論の問題に帰着させてエントロピー最大化原理の一環として解いた。すなわちペナルティ和、 $-(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$ , は本質的に超パラメータ  $w_1, \dots, w_6$  で特徴付けられた次の事前(確率)分布

$$\pi(\theta | w_1, \dots, w_6) = \pi_1(\theta_1 | w_1, w_2) \pi_2(\theta_2 | w_3, w_4) \pi_3(\theta_3 | w_5, w_6)
 \tag{3.3}$$

の対数と考えることができる。ここで、ペナルティ  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  および  $\Phi_3$  は、(2.1) と (3.2) により、パラメータ  $\theta$  について 2 次形式になっており、適当な非負定値対称行列  $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  について

$$\Phi_j(\theta_j | w_{2j-1}, w_{2j}) = \frac{1}{2} \theta_j \Sigma_j \theta_j^t, \quad j=1, 2, 3
 \tag{3.4}$$

である。従って、事前分布  $\pi$  は多次元正規分布であるが、実は各  $j=1, 2, 3$  について  $w_1, w_3, w_5$  が正であっても各成分行列のランクは  $\text{rank}(\Sigma_j) = K-1$  であるため、行列  $\Sigma$  は退化していて、このままでは事前分布は確率分布になり得ない。この困難を避けるため、例えばパラメータ成分  $\theta_1$  を  $(\theta_1^t, a_K)$  のように分けて  $a_K$  を超パラメータと考えると、 $\pi_1(\theta_1 | w_1, w_2)$  は  $\theta_1^t$  の分布としては退化せず

$$\pi_1(\theta_1^t | w_1, w_2, a_K) = \frac{(\det \Sigma_1^t)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}^{K-1}} e^{-\theta_1^t \Sigma_1 \theta_1^t / 2},
 \tag{3.5}$$

なる確率分布である。ここに  $\Sigma_1^t$  は行列  $\Sigma_1$  の最後の対角成分に関する余因子行列である。同様のことを他の  $j$  についても考えられる。

そこでパラメータ  $\theta_1^t$ ,  $\theta_2^t$  そして  $\theta_3^t$  についての事後(確率)分布を定義するための正規化定数を与える高次積分

$$\mathcal{L}(w_1, \dots, w_6; a_K, b_K, c_K) = \int L(\theta) \pi(\theta | w_1, \dots, w_6) d\theta_1^t d\theta_2^t d\theta_3^t
 \tag{3.6}$$

に注目すると、これは超パラメータ  $w_1, \dots, w_6$  および  $a_K, b_K, c_K$  のみの関数であり、この  $\mathcal{L}$  について最大化をするような重みを選ぶのが Good (1965) が提案する Type II 最尤法と呼ばれるものである。Akaike (1980) は  $\mathcal{L}$  をベイズ尤度と呼んでおり Akaike's Bayesian Information Criterion,

$$(3.7) \quad \text{ABIC} = (-2) \max_{w_1, \dots, w_6; a_K, b_K, c_K} \log \mathcal{L} + 2 \times (\text{number of hyperparameters}),$$

を AIC と同様、エントロピー最大化原理 (Akaike (1977)) を実現するものとして提案している。例えば、もし超パラメータ  $w_1, \dots, w_6$  や  $a_K, b_K, c_K$  がそれぞれ独立に働いてベイズ尤度が最適化されるとすれば、この場合の超パラメータの数は 9 である。ベイズモデルを比較するとき ABIC-値の小さい方がデータに良く適合したものと考えられる。

#### 4. 解析例

##### 例 1. 時間変化

北海道浦河沖にずっと活動が続いている地震の巣がある。この地域 ( $41\frac{3}{4} \sim 42\frac{1}{2}^\circ N, 142 \sim 143^\circ E$ ) に限って 1926 年から現在に至るまでの気象庁震源データを見た。図 3(a) は時間経過に関する地震の累積関数である。この累積曲線の傾きが増えているのは、必ずしも地震活動が高くなっているのではなく、地震の検出率が高くなっていることが大きい。事実、図 3(b) の発生地震のマグニチュードの時間経過のプロットを見れば明らかである。ただし 1982 年の最も急なカーブは浦河沖地震に伴う余震のためである。通常ならば、この地域の真の地震活動の推移を見るには、最初から最後までを通して完全な検出が保証されている下限のマグニチュード以上の大きい地震を解析するのであるが、これではデータとして使える地震の数がきわめて少なくなってしまう。それ故、ここでは検出された全てのデータを使う方法を提案しているのである。

全期間 (65 年) を 20 等分して  $B$ -スプラインの基底とする。従って、使用するパラメータ  $\theta = (\theta_1; \theta_2; \theta_3)$  の数は  $3 \times 23$  である。これ以上分割を細かくしても、このデータでは ABIC の

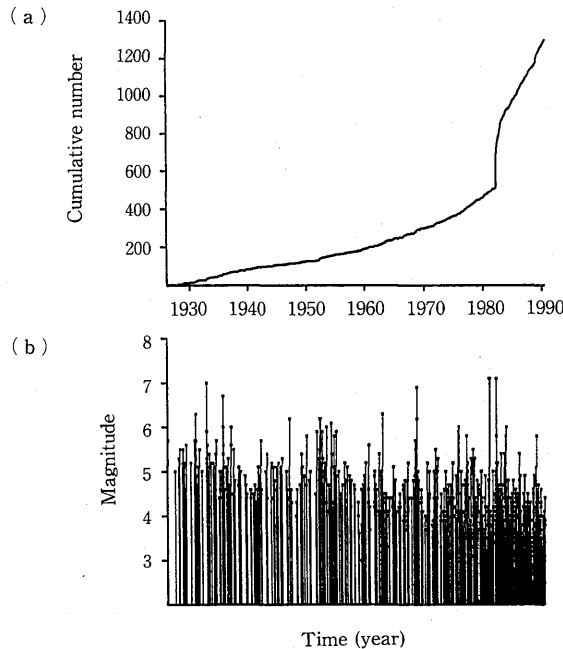


図 3. 浦河沖の地震データ。

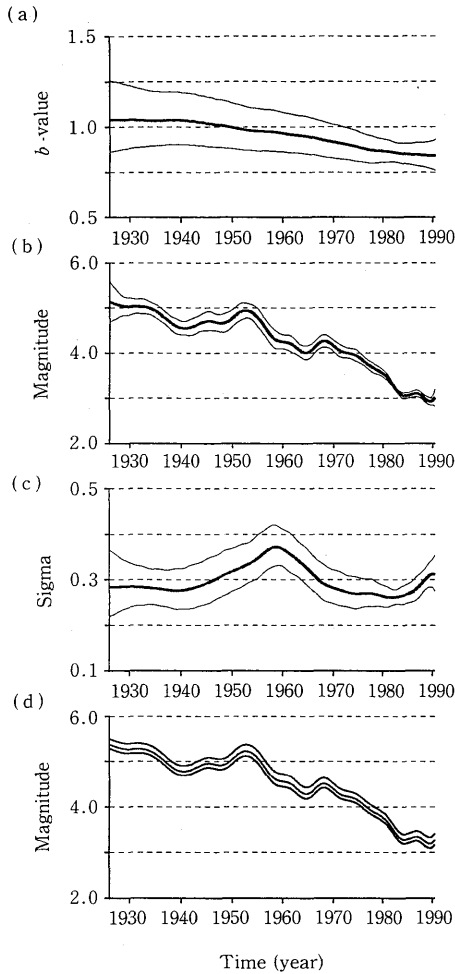


図4. 浦河沖データの推定関数.

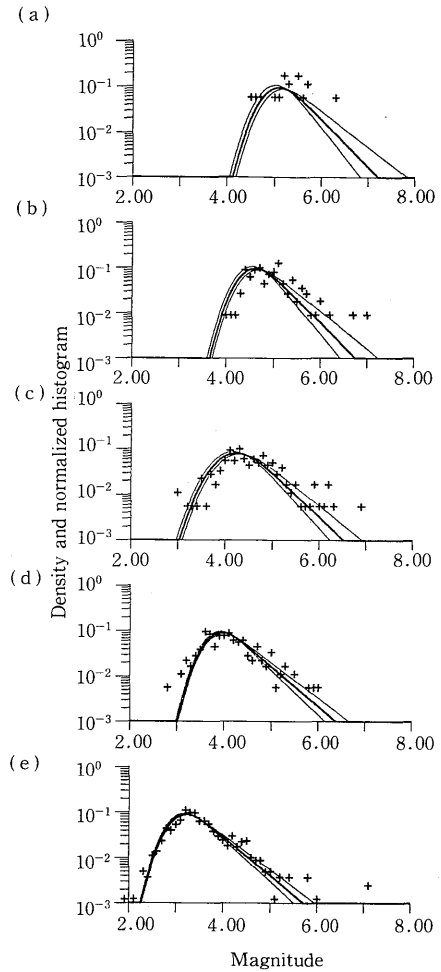


図5. マグニチュード分布の比較.

値が有意に改善しないので、これで十分である。はじめに、3成分のスプライン関数  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  のラフネス-ペナルティを  $w_1=w_3=w_5, w_2=w_4=w_6$  のように等しくとるのか、全く違うようにとるのか比べてみたが、ABICによれば後者の方が遥かに良かった。これは各成分の関数の時間変動の滑らかさに違いがあることを示している。

このようにして得られた最良な事後分布のモード（最頻値；事後分布の最大値を与えるパラメータ）を係数にする  $b(t), \mu(t), \sigma(t)$  が図4(a)~(c)に表現されている。何れの図にも、事後分布から求めた、標準誤差の2倍の上下限の推定誤差曲線も示してある。一定区間での検出地震数が多ければ多いほど、その区間での推定誤差が小さくなっていることが分かる。図4(a)の  $b$ -値曲線は1.0のまわりを変動している。図4(b)の50%検出度マグニチュードの曲線は、昭和の前中期にはマグニチュード5.0だったものが最近10年間では3.0ぐらいに下がってきた。 $\sigma$ -値(図4(c))も必ずしも定数でないことが見られる。図4(b), (c)に示された  $\mu(t)$  と  $\sigma(t)$  から(2.2)式によって任意の検出率の曲線が得られる。例えば、図4(d)に示したのは上から順に  $p=90\%, 80\%$  そして  $70\%$  検出マグニチュード曲線であり、これらは  $\mu(t) + \gamma_p \sigma(t)$  で与えられ

る。

本当にこの推定曲線は合理的なものであろうか。全期間を1945, 65, 75そして83年で分割した六つの区間ごとにマグニチュード頻度分布のヒストグラム(+印)をとり、これらと各区間の真中の時点の $(b, \mu, \sigma)$ 値による密度関数 $f(M|b, \mu, \sigma)$ (太い実線)を比べたのが図5である。誤差曲線(細い実線)は事後分布のモードにおける密度関数 $f(M|b, \mu, \sigma)$ の曲線のTaylor展開の第1次近似で計算したもので、正確とはいえないが大体の感じを示したものである。この図からマグニチュード分布の時間変化が良くフォローされていることが分かる。

## 例2. 空間変化: 気象庁カタログ

図6に示したものは、1979年から83年までの5年間の気象庁観測網によって捕捉された地震の震央分布図である。この5年間の時間変化が無いものとして検出率や $b$ -値の空間変化について調べてみた。展開式(2.1)およびラフネス-ペナルティ汎関数(3.2)は双1次の $B$ -スプライン展開(例えば井上(1985))に対しても考えられ、ABICも同様に計算できる(Ogata and Katsura(1988))。図の領域を緯度経度それぞれ1度ごとに、 $20 \times 16$ の近似長方形で分割し2次元 $B$ -スプライン曲面で3成分を表現すると、係数パラメータ $\theta = (\theta_1; \theta_2; \theta_3)$ の数は $3 \times 23 \times 19$ である。さらに細かく分割すればABICの値が改善するかも知れないが、本研究所の大型計算機の主記憶容量の制限のため、これは保留せざるを得なかった。はじめに3成分 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ のラフネス-ペナルティを $w_1 = w_3 = w_5, w_2 = w_4 = w_6$ のように等しくとるのか全く違うようにとるのか比べたが、ABICによれば後者の方が遥かに良かった。これは各成分の関数の空間変動の滑らかさに違いがあることを示している。

このようにして得られた最良な事後分布のモードを係数に持つスプライン関数の各成分面が、等高線図7(a), 8(a), 9(a)に表現されている。他方、等高線図7(b), 8(b), 9(b)は事後分布から求めた標準誤差の曲面である。図6と比較すれば良く分かるように、震央分布が密であるところほど推定誤差が小さくなっており、疎であるところやとりわけ領域周辺部では推定誤差が大きい。図7(a)の $b$ -値曲面は1.0を境にして、大きければ影をつけて小さければ白抜きになっている。等高線の間隔は0.2である。これに対して図7(b)の誤差曲面の等高線間隔は0.1であ

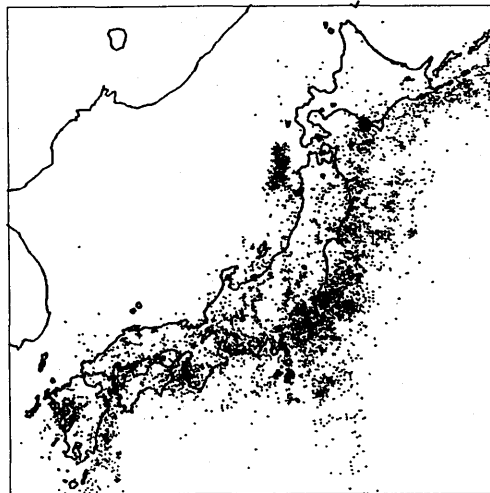


図6. 1979~83の震央図。



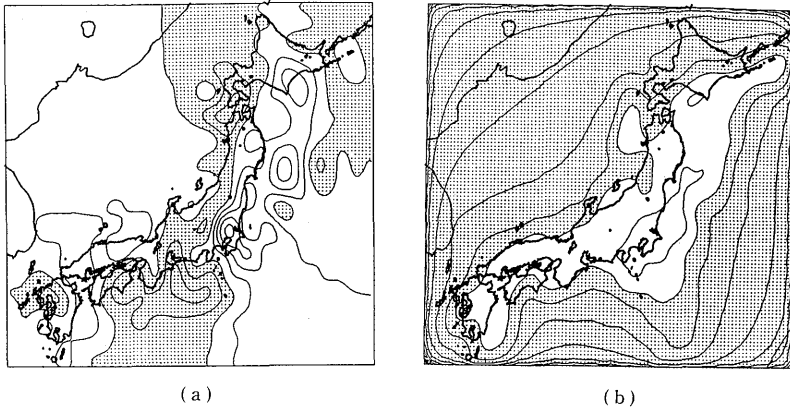


図7.  $b$ -値.

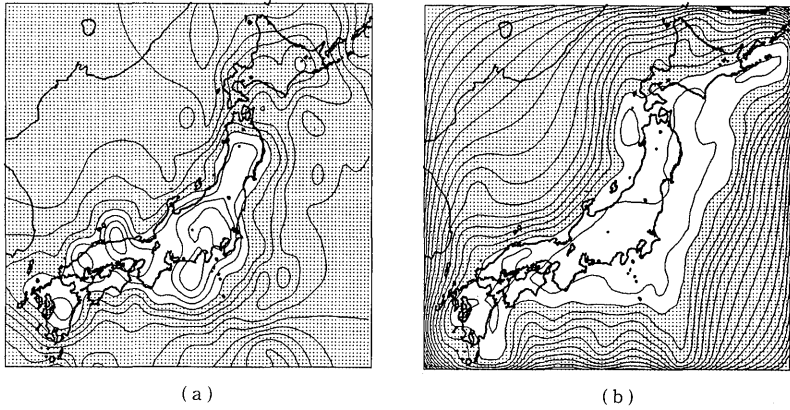


図8.  $\mu$ -値.

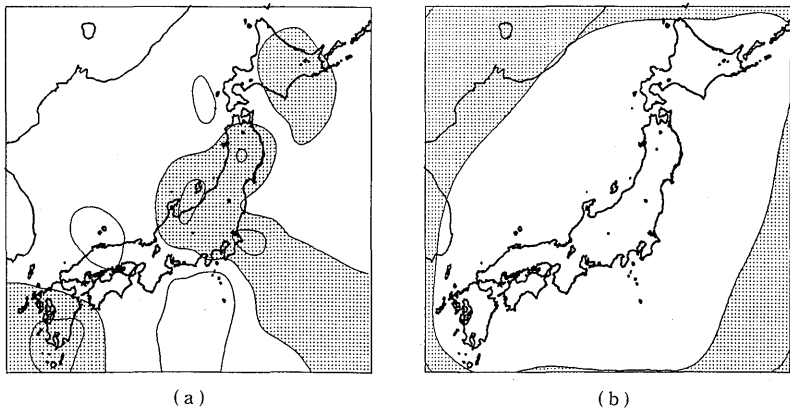


図9.  $\sigma$ -値.

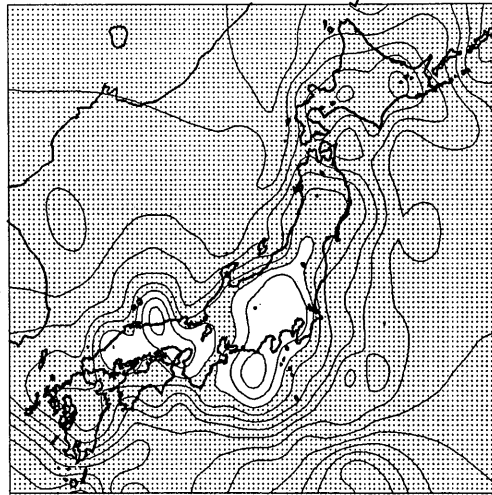


図10. 95% 検出マグニチュード.

り、白抜きの部分は0.2以下の誤差の領域を示している。この時期に $b$ -値が低いのは、北海道、東北、関東にまたがるプレート境界、九州東部のプレート境界の地震で、これに対して内陸一般の地震、東海近畿のプレート境界、九州西部内陸の地震は $b$ -値が高い。この時期の中国地方の $b$ -値は低いようである。図8(a)の50%検出度のマグニチュード曲面は明確に日本地図（つまり気象庁の地震観測所の分布）と密接な関係を示している。等高線間隔は0.2で、白抜きの部分はマグニチュード3.0以下の領域である。これに対して図8(b)の誤差曲面の等高線間隔は0.1であり、白抜きの部分は0.2以下の誤差の領域を示している。 $\sigma$ -値曲面（図9(a)）も前2成分に比べて変化はきわめて少ないが、誤差曲面（図9(b)）と比べると必ずしも定数でないことが見れる。この分布が何を意味するのか今のところ分からない。前の例と同様にして95%検出率曲面は $\mu(x, y) + 2\sigma(x, y)$ で与えられ、図10がそれを示している。これによると最も検出率が高い地域（マグニチュード2.6）が二つある。一つは遠州灘すなわち東海地震の予定震源域で、海底地震計ネットを敷設してある付近でもある。もう一つは解析期間最後の年の1983年鳥取地震の余震域近辺である。中国地方は普段地震活動が低いので検出率は高いようである。

### 例3. 空間変化：NOAA カタログ

例2と同じ日本周辺地域について、米国地質調査所（USGS）によって編集されたNOAA震源カタログのデータを解析してみた。気象庁のそれに比べて検出されている地震の数が少ないので1970年から20年間を考えた。この間、検出率の時間変化は無いようである。はじめに3成分 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ のラフネス-ペナルティを $w_1 = w_3 = w_5, w_2 = w_4 = w_6$ のように等しくとるのか、全く違うようにとるのか比べたがABICによれば後者の方が遥かに良かった。これは各成分の関数の空間変動の滑らかさに違いがあることを示している。

このようにして得られた最良な事後分布のモードによると、 $b$ -値、 $\mu$ -値はほとんど水平面（ $b \approx 1.4, \mu \approx 4.7$ ）であるが、 $\sigma$ -値の変動パターンは例2の気象庁データの場合と良く似ている。USGSは震源要素を決めるのに日本の観測所に偏らない世界的なネットを使用しているので、NOAA震源カタログの $\mu$ -値が定数的なのは理解できる場所である。NOAAカタログに掲載された地震のマグニチュードは大半が4.5（実体波マグニチュード）以上の大きい地震であり、

20年間の  $b$ -値変化は平均化されて空間変化が定数化したものと考えられる。気象庁の  $b$ -値変動の平均が1.0前後であるのに対して、NOAAのデータでは  $b \approx 1.4$  と食い違っている。これは、それぞれが採用しているマグニチュードの決定方式が違っているせいである。

#### 例4. 時空間変化

例2および3と同じ日本周辺地域について、1926年から現在に至るまでの  $b$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  の3成分の時空間変化を3次元スプライン関数で当てはめた。時間変化と空間変化では尺度も比較できず、平滑化の重みも違うことが考えられる。本質的にはOgata et al. (1991) で考えられた3次元不均質構造の枠組みで議論できるが、余りにパラメータ  $\theta$  の次元数が大きすぎてABICを使っての重みの決定はできなかった。ABICを使って最適化された、幾つかの地域の1次元の時間変化の結果と各時間区間での2次元空間変化の結果を得ておく。そこでこれらを時空間3次元画像の対応する次元への断面図と比較しながら適当な重みを決定した(Ogata (1992))。このようにして得られたパラメータを係数に持つスプラインの値を有色動画像にしてビデオによって表示した。これによると  $\mu$ -値は時代や経済状況に伴って大きく変化を見せたが、 $b$ -値の変化は、おおよそ図8(a)のパターンから大きく変わることがない。 $\sigma$ -値も独特の変化を示したがその解釈は未だついていない。

#### 5. ま と め

この講演では、震源データから地震の検出率の量的変化とマグニチュード頻度分布の  $b$ -値解析を同時に議論する統計モデルを考えた。この話題の大半はOgata and Katsura (1991) に詳しく議論されている。一般に、マーク付き点過程の不均質構造(非定常, anisotropic)の解析と考えられ、大量のパラメータで表現され大規模ベイズ推論が必要とされる。地震のデータのみならず、疫学データなど、歴史的な取り扱いを必要とするもの、空間データ、時空間データなどの同様なモデルに有用なヒントを与えるものと期待している。

#### 参 考 文 献

- Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle, *Application of Statistics* (ed. P.R. Krishnaiah), 27-41, North-Holland, Amsterdam.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J.M. Bernard, M.H. De Groot, D.U. Lindley and A.F.M. Smith), University Press, Valencia, Spain.
- Good, I.J. (1965). *The Estimation of Probabilities*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- Good, I.J. and Gaskins, R.A. (1971). Nonparametric roughness penalties for probability densities, *Biometrika*, 58, 255-277.
- Gutenberg, R. and Richter, C.F. (1944). Frequency of earthquakes in California, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 34, 185-188.
- Gutenberg, R. and Richter, C.F. (1954). *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- 井上 公 (1985). 一般化インバース理論に基づく離散データの平滑化, *情報地質*, 10, 105-134.
- 望月英志, 小林悦夫, 岸尾政弘 (1978). 1965~1974年の気象庁の震源検知能力, *験震時報*, 42, 23-30.
- Ogata, Y. (1992). Space-time evolution of hypocenter determination ability of seismic activity and  $b$ -value changes of magnitude frequency distribution in and around Japan 1926-1989: a videotape (to be submitted to *Journal of Computational and Graphical Statistics*).
- Ogata, Y. and Katsura, K. (1988). Likelihood analysis of spatial inhomogeneity for marked point patterns, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 40, 29-39.
- Ogata, Y. and Katsura, K. (1991). Analysis of temporal and spatial heterogeneity of magnitude

- frequency distribution inferred from earthquake catalogs, Research Memo., No. 420, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Ogata, Y., Imoto, M. and Katsura, K. (1991). 3-D spatial variation of  $b$ -values of magnitude-frequency distribution beneath the Kanto district, Japan, *Geophysical Journal International*, **104**, 135-146.