因子分析における共通性および関連する行列の固有値の推定量の漸近分布について

東京外国語大学　市　川　雅　教

1. はじめに

因子分析モデル（Lawley and Maxwell（1971））のもとで，観測される変数を要素とするベクトル $\boldsymbol{x}(p\times 1)$ は，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Lambda f}+\boldsymbol{u}$ と表される．ここで，$\boldsymbol{\mu}$ は $\boldsymbol{x}$ の母平均を要素とするベクトル，$\boldsymbol{f}(m\times 1)$, $\boldsymbol{u}(p\times 1)$ はそれぞれ共通因子，独自因子を要素とするベクトルである．$\boldsymbol{\Lambda}(p\times m)$ の要素 λ_{jk} は，k 番目の因子に対する j 番目の変数の因子負荷量である．さらに，$E(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{0}$, $E(\boldsymbol{ff}')=\boldsymbol{I}_m$（$m$ 次単位行列），$E(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$, $E(\boldsymbol{uu}')=\boldsymbol{\Psi}$（対角・正定値行列），$E(\boldsymbol{fu}')=\boldsymbol{O}$ を仮定する．以上の仮定から，$\boldsymbol{x}$ の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Lambda\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi}$ という構造を持ち，$h_j^2=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}^2$ とおくと，観測される変数の分散 σ_{jj} は，$\sigma_{jj}=h_j^2+\psi_j$ （$1\leqq j\leqq p$）と分解される．h_j^2 は共通因子により説明される部分で共通性と呼ばれ，これに対して ψ_j は独自性と呼ばれる．なお，以下では $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}$ が識別可能であること，すなわち，$\boldsymbol{\Sigma}$ の分解が，因子の回転（$\boldsymbol{\Lambda}$ の右側から直交行列をかけること）の不定性を除いて一意に定まることを仮定する．このとき $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Lambda})=m$ となる．

2. 再パラメタ化

$\boldsymbol{\Sigma}$ に $\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}$ を両側からかけて基準化した行列を $\boldsymbol{\Sigma}^*$ とし，そのスペクトル分解を $\boldsymbol{\Omega\Theta\Omega}'(\boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{I}_p)$ とする．$\boldsymbol{\Sigma}^*$ の小さい方から $p-m$ 個の固有値は 1 となる．いま，大きい方から m 個の固有値は互に異なること，すなわち，$\theta_1>\cdots>\theta_m$ を仮定し，$\theta_1, \ldots, \theta_m$ を要素とする m 次対角行列を $\boldsymbol{\Theta}_1$, $\theta_1, \ldots, \theta_m$ および $\theta_{m+1}, \ldots, \theta_p$ に対応するノルム 1 の固有ベクトルを各列の要素とする行列をそれぞれ $\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2$ とする．$\boldsymbol{\Lambda}$ から回転の不定性を除くために non-diag $\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\boldsymbol{\Omega}_1(\boldsymbol{\Theta}_1-\boldsymbol{I}_m)^{1/2}$ となり，$(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi})$ と $(\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Psi})$ とは等価であることが分る．

θ_k （$1\leqq k\leqq m$）は，因子の回転や測定の単位の変更のもとで不変であり，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{f}$ の正準相関係数の二乗を $\nu_1^2>\cdots>\nu_m^2$ とすると $\theta_k=(1-\nu_k^2)^{-1}$ という関係がある．

3. 母数 $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}$ の最尤推定量

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ を $\mathrm{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$（ただし，$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Lambda\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi}$）からの独立な観測値とし，$\boldsymbol{S}=n^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})'$ （$n=N-1$）とする．因子分析モデルの母数 $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ は，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ との「距離」

$$F_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\Sigma})=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S\Sigma}^{-1}-\ln|\boldsymbol{S\Sigma}^{-1}|-p$$

を最小にするものとして定義される．$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Psi}^{-1}-\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ とすると，$\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Phi}$（$\odot$は行列のアダマール積を表す）が正定値であれば，$\hat{\psi}_j$ は次のように表される（Anderson and Rubin（1956））．

$$\hat{\psi}_j=\psi_j+\sum_{i=1}^{p}\sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{p}\xi^{ji}\phi_{ig}\phi_{ih}(s_{gh}-\sigma_{gh})+O_p(n^{-1})$$

一方 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ は，$\boldsymbol{S}^*=\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1/2}\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1/2}$ の最大 m 個の固有値を要素とする対角行列 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_1$ と，対応するノルム 1 の固有ベクトルを各列の要素とする行列 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_1$ により $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}=\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_1(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_1-\boldsymbol{I}_m)^{1/2}$ と表せる．N

$\to\infty$ の場合に s_{ij} は正規分布にしたがい，$n\,\mathrm{Cov}(s_{ij},\ s_{gh})=(\sigma_{ig}\sigma_{jh}+\sigma_{ih}\sigma_{jg})$ $(1\leqq i,\ j,\ g,\ h\leqq p)$ となる．したがって，$\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\dots,\psi_p)'$ とすると，$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi})$ は漸近的に $\mathrm{N}_p(\mathbf{0},2\boldsymbol{\Xi}^{-1})$ にしたがう．

4. 共通性の推定量の漸近分布

因子分析の結果の解釈にあたっては，共通性がいろいろな目安になるが，共通性の推定量の分布については報告されていない．さて，$\hat{h}_j^2=\sum_{k=1}^{m}\hat{\lambda}_{jk}^2$ とすると，$s_{jj}=\hat{h}_j^2+\hat{\psi}_j$ $(1\leqq j\leqq p)$ という関係が成立し，s_{ii} と $\hat{\psi}_j$ の漸近共分散が $n\,\mathrm{Cov}(s_{ii},\ \hat{\psi}_j)=2\delta_{ij}\psi_j^2$（ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号）となることを用いると，

$$n\,\mathrm{Cov}(\hat{h}_i^2,\ \hat{h}_j^2)=n\,\mathrm{Cov}(\hat{\psi}_i,\ \hat{\psi}_j)+2(\sigma_{ij}^2-2\delta_{ij}\psi_j^2)\qquad(1\leqq i,\ j\leqq p)$$

が得られる．この関係は，重みなし最小二乗法，単純最小二乗法（丘本（1986）を参照）などについても成立する．上式より，$\sigma_{jj}>\sqrt{2}\psi_j$，すなわち，${}^*h_j^2=h_j^2/\sigma_{jj}>0.292\cdots$ の場合には，$V(\hat{h}_j^2)>V(\hat{\psi}_j)$ となるので，$V(\hat{h}_j^2)$ を $V(\hat{\psi}_j)$ で代用すると過小評価になることが分る．

5. θ_k の推定量の漸近分布

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*=\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1/2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1/2}$ の k（$1\leqq k\leqq m$）番目の固有値は $\boldsymbol{S}^*$ の k 番目の固有値に一致し，また，θ_k, $\boldsymbol{\omega}_k$ の最尤推定値 $\hat{\theta}_k$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k$ は，$\boldsymbol{x}$ の測定の単位の変更のもとでも不変である．$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\Psi}}-\boldsymbol{\Psi})\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}$ とする．$\boldsymbol{\Xi}$ が正定値であれば，

$$\hat{\theta}_k-\theta_k=\frac{1}{\theta_k-1}w_{kk}-\frac{\theta_k}{\theta_k-1}v_{kk}+O_p(n^{-1})\qquad(1\leqq k\leqq m)$$

と表される．したがって $\sqrt{n}(\hat{\theta}_k-\theta_k)$ は，漸近的に平均 0 の正規分布にしたがい，$\hat{\theta}_k$ と $\hat{\theta}_l$（$1\leqq k,\ l\leqq m$）の漸近共分散は

$$n\,\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_k,\ \hat{\theta}_l)=2\delta_{kl}\theta_k^2+2\theta_k\theta_l(\boldsymbol{\omega}_k\odot\boldsymbol{\omega}_k)'\{(\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\Omega}_2')\odot(\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\Omega}_2')\}^{-1}(\boldsymbol{\omega}_l\odot\boldsymbol{\omega}_l)$$

となる．$\hat{\theta}_k$ の漸近標準誤差を $\sigma(\hat{\theta}_k)$ とすると，$\sigma(\hat{\theta}_k)$ が相対的に大きい因子を含むような負荷量行列は，不安定であると考えられる．実データでは，Akaike (1987) の指摘する共通性の特異的な増加が見られる場合に，対応する $\hat{\sigma}(\hat{\theta}_k)$ が相対的に大きくなる．

参 考 文 献

Akaike, H. (1987). Factor analysis and AIC, *Psychometrika*, **52**, 317-332.

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.

Lawley, D.N. and Maxwell, A.E. (1971). *Factor Analysis as a Statistical Method*, 2nd ed., Butterworth, London.

丘本 正 (1986).『因子分析の基礎』, 日科技連, 東京.