Bekker, P.A. and De Leeuw, J. (1987). The rank of reduced dispersion matrices, *Psychometrika*, **52**, 125-135.

Bentler, P.M. (1972). A lower-bound method for the dimension-free measurement of internal consistency, *Social Science Research*, **1**, 343-357.

Ihara, M. and Kano, Y. (1986). A new estimator of the uniqueness in factor analysis, *Psychometrika*, **51**, 563-566.

Kano, Y. (1989). A new estimation procedure using g-inverse matrix in factor analysis, *Math. Japon.*, **34**, 43-52.

丘本 正 (1986).『因子分析の基礎』, 日科技連, 東京.

Shapiro, A. (1982). Rank-reducibility of a symmetric matrix and sampling theory of minimum trace factor analysis, *Psychometrika*, **47**, 187-199.

Woodhouse, B. and Jackson, P.M. (1977). Lower bounds for the reliability of the total score on a test composed of nonhomogeneous items, *Psychometrika*, **42**, 579-591.

Yanai, H. (1990). Some generalized forms of least squares g-inverse, minimum norm g-inverse, and Moore-Penrose inverse matrices, *Comput. Statist. Data Anal.*, **10**, 251-260.

Yanai, H. and Ichikawa, M. (1990). New lower and upper bounds for communality in factor analysis, *Psychometrika*, **55**, 405-409.

柳井晴夫, 繁桝算男, 前川眞一, 市川雅教 (1990).『因子分析 —— その理論と方法 ——』, 朝倉書店, 東京.

潜在変数または顕在変数に関する尺度不変因子分析モデルのある拡張

鉄道総合技術研究所 小笠原 春 彦

1. 問題

独立な集団間での因子構造や因子パターンの不変性または相違の問題は, 心理学においては factorial invariancy の問題として古くから論じられてきた. 因子負荷行列を異なる集団間で不変とするモデルのうち, 因子の分散共分散行列の構造化モデルのひとつは, Harshman の PARAFAC2 モデルである. このモデルは, 因子回転の不定性から自由であるというユニークな性質を持っている. ところで, 観測個体が属する集団が複数個の集団に離散的に分かれるのではなく, 外的変数 (例えば年齢や所得) とともに連続的に変化する事態において, 分散共分散行列が変化するモデルが Ogasawara (1989, 1990) により提案されている. また, その特殊ケースとして PARAFAC2 モデルの連続的に変化する多母集団への拡張が小笠原 (1989) により行われた. ここでは, PARAFAC2 モデルを潜在変数である共通因子のレベルでの尺度不変モデルとしてとらえるとともに, これに対応する顕在変数に関する尺度不変モデルを提案し, 適用例を示す.

2. モデルとモデルにおけるパラメータの推定

小笠原 (1989) は PARAFAC2 モデルのある拡張として次のモデルを提案した. p 個の観察された変量で構成されるベクトルを $\boldsymbol{s}$ であらわし, i 番目のサンプルの値を $\boldsymbol{s}_i$ とすると, $\boldsymbol{s}_i$ は次のように記述される.

$$\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{\mu}_i+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{f}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

ここで, $\boldsymbol{\Lambda}$ は $p\times k$ の集団間で不変な因子負荷行列, $\boldsymbol{f}_i$ は長さ k の共通因子のベクトル, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は長さ p の独自因子のベクトルであり, $E(\boldsymbol{s}_i)=\boldsymbol{\mu}_i$, $E(\boldsymbol{f}_i)=\boldsymbol{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{0}$ である. $\boldsymbol{f}_i$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は, $i=1, \ldots, N$ のサンプルについて, 互いに独立に次の多変量正規分布に従うとする.

$$\boldsymbol{f}_i \sim \mathrm{N}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}_i)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathrm{N}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Psi}_i)$$

ここで，$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{f}_i,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{O}$ であり，$\boldsymbol{W}_i$ と $\boldsymbol{\Psi}_i$ は対角行列とする．これらから，

$$\boldsymbol{s}_i \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}_i,\ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi}_i) \qquad (i=1, \ldots, N)$$

となる．ここで，モデルの一意性のために $\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{I}$ とする．$\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}_i$ と $\boldsymbol{\Psi}_i$ は，i 番目の個体がとる外的基準の値 y_i が与えられた時の共通因子と独自因子の分散共分散行列であり，y_i の関数である．なお，$\boldsymbol{\Sigma}_i=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi}_i$ とする．

さて，この拡張された PARAFAC2 モデルでは $\boldsymbol{\Sigma}_i$ の相違を共通因子の分散の相違によるものとしてとらえており，因子レベルでの尺度不変モデルとみなすことができるが，これらの相違が観察された顕在変数の尺度の相違として考えられる場合には次のように $\boldsymbol{\Sigma}_i$ を書き換えることができる．なお，モデルを簡略にするために k 個の共通因子は直交しているものとする．

$$\boldsymbol{\Sigma}_i=\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi})\boldsymbol{D}_i$$

ここで，$\boldsymbol{D}_i$ と $\boldsymbol{\Psi}$ は対角行列で，モデルの一意性のために $\mathrm{Diag}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi})=\boldsymbol{I}$ とする．すなわち，$\boldsymbol{D}_i$ の対角要素は顕在変数の標準偏差であり，y_i によって定まる．また，拡張 PARAFAC2 モデルと同様に $E(\boldsymbol{s}_i)=\boldsymbol{\mu}_i$ とする．なお，このモデルには通常の直交因子モデルと同様に因子回転の不定性が存在する．

拡張 PARAFAC2 モデルにおけるパラメータは $\boldsymbol{\mu}_i$，$\boldsymbol{W}_i$，$\boldsymbol{\Psi}_i$ におけるパラメータと $\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{\Lambda}$ である．顕在変数に関する尺度不変モデルでは，パラメータは $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{D}_i$ におけるパラメータと $\boldsymbol{\Lambda}$ である．パラメータの最尤推定値はフィッシャーのスコア法により求めるが，そのために必要なグラディエントベクトルとヘシアン行列の期待値は比較的規則的に求めることができる．モデルのデータへのあてはまりの良さに関しては，複数のグループに分かれたデータの共分散構造分析のケースとは異なり，標本分散共分散行列に相当するものが得られないので，適当な統計量がない．しかし，パラメータの推定値の漸近的な標準誤差が数値計算における収束時の情報行列の逆行列の対角要素の平方根より得られるので，パラメータの評価を行うことができる．

3.　モデルの適用及び討論

以上のモデルを，6 問題から成り，2 因子を想定した成人用知能検査のデータへ適用した．各問題の正答数は年齢とともに平均が減少するだけでなく，分散共分散行列も変化するが，$\boldsymbol{\mu}_i$，$\boldsymbol{W}_i$, $\boldsymbol{\Psi}_i$, $\boldsymbol{D}_i$ の各要素が，年齢に関する多項式であらわせるモデルを設定した．このデータでは，ϕ_{21} の t 値（推定値/推定値の標準誤差）が小さく，モデルの一意性はあるものの $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}$ の場合と，あまり当てはまりは変わらない結果となった．（$\boldsymbol{W}_i$ が対角行列の場合には通常の因子回転の不定性が生じる．）また，$\boldsymbol{\mu}_i$ が Ogasawara（1990）のモデルのように，因子レベルの変化に分解されるモデルが，当モデルの発展として考えられた．また，顕在変数に関する尺度不変モデルには，因子回転の不定性があるが，回転後の因子負荷の標準誤差を Jennrich の方法により求め，因子負荷の推定値の評価として利用した．

参　考　文　献

小笠原春彦（1989）．連続的に変化する多母集団の PARAFAC モデル，第 17 回日本行動計量学会大会発表論文抄録集．

Ogasawara, H. (1989). Covariance structure analysis of continuously changing populations, *Behaviormetrika*, **25**, 15-33.

Ogasawara, H. (1990). Covariance structure model when the factor means and the covariances are functions of the third variable, *Japanese Psychological Research*, **32** (1), 19-25.

主成分分析で計算した因子負荷の性質 —— 単因子の場合 ——

広島大学 工学部 佐 藤 学

主成分分析 (PCA) は因子分析 (FA) の代用とされることが多い．そこでその妥当性を論じたい．PCA で FA の代用をするときには，相関行列 P を

$$P=(QD^{1/2})(QD^{1/2})'$$

と分解し，$QD^{1/2}$ の初めの k 列からなる行列を FA における因子負荷行列とみなす．ここで D は P の固有値が大きい順に対角に並んだ対角行列，Q は $Q'PQ=D$ とする直交行列である．k が未知のときには，P の 1 より大きい固有根の個数を因子数とすることが多い．

論ずる対象を述べよう．母集団での性質を論ずる；標本からの因子分析による推定値を陽的に表現するのは困難である．ここでは単因子，つまり因子数が 1，の場合に焦点をあてる；データが完全な単純構造，つまり因子負荷行列のどの行にも非零要素が唯一である構造，をもつことを想定することが実際上多く，その形は単因子構造に帰着できるので，簡単な形ではあるが有意義である．

接近法・仮定を説明しよう．PCA で FA の代用をするときには，FA の模型の成立を暗に仮定していると思われる．そこで母相関行列 P が FA の模型から導かれる構造

$$P=\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}'+\Psi$$

をもつと仮定しよう．ここで $\underset{\sim}{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)'$ は因子負荷ベクトル，Ψ は誤差分散を表わす対角行列である．観測ベクトルの第 i 変量の符号を逆転させることにより λ_i の符号は反転でき，また変量の順序もかえることができるので一般性を失うことなく $\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$ を仮定できる．$p\geqq 3$, $\lambda_i\neq 0$ を仮定しよう．すると Anderson and Rubin (1956) による因子負荷行列が一意であるための十分条件がみたされるので FA では真値が得られる (Ihara and Kano (1986))．したがって代用をすることの吟味は，PCA で計算した因子負荷ベクトル $\underset{\sim}{\tilde{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_p)'$ を $\underset{\sim}{\lambda}$ と比べることに帰着される．

定理. P が構造

$$P=\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}'+\Psi,$$

ただし $\underset{\sim}{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)'$, $1>\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$, $p\geqq 3$, $\Psi=\mathrm{diag}(I-\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}')=\mathrm{diag}(\psi_1,\ldots,\psi_p)$ をもち，Pの固有根を $\theta_1\geqq\cdots\geqq\theta_p$ としよう．このとき，(1)～(5) が成立つ．

(1) $$\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_p\geqq\theta_1\geqq\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_1>1>\psi_p\geqq\theta_2\geqq\psi_{p-1}\geqq\cdots\geqq\theta_p\geqq\psi_1.$$

(2) $$1\geqq\tilde{\lambda}_1\geqq\cdots\geqq\tilde{\lambda}_p>0.$$

(3) $$\underset{\sim}{\tilde{\lambda}}=(1+O(1/(\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda})))\underset{\sim}{\lambda}.$$

(4) $$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\cdot\frac{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_1^2+\lambda_j^2}{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_1^2+\lambda_i^2}\leqq\frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_j}\leqq\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\cdot\frac{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_p^2+\lambda_j^2}{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_p^2+\lambda_i^2},\qquad i<j.$$