参 考 文 献

Jöreskog, K.G. and Sörbom, D. (1984). *LISREL VI User's Guide: Analysis of Linear Structural Relationships by the Models of Maximum Likelihood*, National Education Resources, Chicago, Michigan.

豊田秀樹 (1990). 共分散構造の表現, 教育心理学研究, **38**, 438-444.

柳井晴夫, 前川眞一, 豊田秀樹, 仙崎　武(1991). 高等学校における進学指導の実態に関する調査結果の分析, 大学入試センター研究紀要, **20**, 93-166.

補助情報を用いた項目反応モデル

東京工業大学 工学部　繁　桝　算　男

1. 問題

項目反応理論 (item response theory, 項目応答理論とも言われる) は教育測定の文脈において発達した潜在変数モデル (latent variable model) である. このモデルは観測変数がカテゴリカルな場合の因子分析モデルに他ならないが, 項目反応理論は教育測定として実際に役に立つことを主眼とするために, 等質な項目群を前提とし, 最初から一次元を仮定することが普通である. しかし, 項目や被験者の多次元的記述が望ましい応用場面も数多くあると思われる. ここではその目的のために回転の不確定性等の問題を含む多因子によってではなく, 項目に対する正誤反応に加えて解答に対する自信度を補助情報として取り入れ, 確定した因子による記述を考える. 自信度を考慮することによって学習指導上有益な情報を取り出すことができることは既に指摘されている (下村 (1988)). 本報告の目的は, 「正答/誤答」と「自信あり/なし」という2つのカテゴリカルな基準変数に対して, 真の学力 (θ) と真の自信度 (η) という潜在的変数を導入することによって, 学習者の真の能力や自信度の推定の精度を高め, 項目の特徴の見方を多彩にすることである.

2. モデル

項目 j に対して被験者 i が正答したかどうかを記録するダミー変数を x_{ij} (正答の場合 $x_{ij}=1$, 誤答の場合 $x_{ij}=0$), 自信があるかどうかを記録するダミー変数を y_{ij}(自信ありの場合 $y_{ij}=1$, 自信なしの場合 $y_{ij}=0$)とする. x_{ij} と y_{ij} の同時分布に対する確率模型がこの場合に必要なモデルである. 個人 i の真の学力を θ_i, 真の自信度を η_i, 2つの潜在変数の相関係数を ρ_i とする. θ_i と η_i を所与とするとき, $x_{ij}=1$ の確率は θ_i のみに依存する3母数ロジスティックモデル, $y_{ij}=1$の確率は η_i のみに依存する2母数ロジスティックモデルであると想定する. すなわち,

$$p(x_{ij}=1\mid\theta_i)=p_j(\theta_i)=c_j+\frac{1-c_j}{1+\exp(-Da_j(\theta_i-b_j))}$$

$$p(y_{ij}=1\mid\eta_i)=p_j(\eta_i)=\frac{1}{1+\exp(-D\alpha_j(\eta_i-\beta_j))}$$

である (ここで, $D=1.7$). また, θ_i と η_i の事前分布は

$$p(\theta_i,\ \eta_i\mid\rho_i)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\theta_i^2-2\rho_i\theta_i+\eta_i^2}{2(1-\rho_i^2)}\right\}$$

とする.

3. 母数の推定

全母数を $\boldsymbol{\xi}$ とするとき，尤度は,

$$L(\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p}[p_j(\theta_i)^{x_{ij}}\{1-p_j(\theta_i)\}^{1-x_{ij}} \times p_j(\eta_i)^{y_{ij}}\{1-p_j(\eta_i)\}^{1-y_{ij}}\times p(\theta_i,\ \eta_i\mid \rho_i)p(\rho_i)]$$

となる．相関 ρ_i は重要な情報であるが，θ_i，η_i，ρ_i を同時に推定することはできない．モデルが識別性を持つためには，全ての i について $\rho_i=\rho$ を仮定したり，あるいは，項目ごとに相関が変わるという意味で項目 j について ρ_j という母数を導入する（豊田，私信）ことが考えられるが，ここで報告する結果は次のような便宜的な方法によるものである．すなわち，ρ_i に関しては外部的に推定する．よく知られているように，2つの潜在変数が正規分布に従い，1-0 的に単純な2分割に従って顕在変数化する場合，2つの潜在変数間の相関係数は四分相関係数によって与えられる．本モデルの場合，θ_i と η_i と x_{ij}, y_{ij} の間の関係はこのような簡単なものではないが，便宜上，ρ_i の推定値が四分相関係数によって与えられると仮定する．残りの母数 θ_i と η_i に関して積分し除去した関数を最大化することによって a_j，b_j，c_j，α_j，β_j の推定値を得る．θ_i と η_i に関する2重積分は数値的に処理し，最適化の方法として最急降下法を適用した.

4. 適用例

統計学の多肢選択を16題作成し，56名の大学院生に適用した．上記の分析の結果，易しいが自信の持ちにくい項目とか，正答率は低いのに結構自信を持たれている項目等が識別され，項目作成上，出題系列の最適化等に有用な情報を与えることが分かった.

参 考 文 献

下村 努（1988）.『教育評価手法』，教育情報科学，3，第4章，第一法規，東京.

Growth Curve Models with Fixed and Random Effects

広島大学 理学部 藤 越 康 祝

Rao(1959)とPotthoff and Roy(1964)によって導入されたgrowth curveモデルにおいては，$N\times p$ の観測行列 $\boldsymbol{X}$ に対して

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

が想定される．ここに，$\boldsymbol{A}:N\times k$, $\boldsymbol{B}$: $q\times p$ ($q\leqq p$) はそれぞれ個体間，個体内計画行列，$\boldsymbol{\Xi}$: $k\times q$ は未知パラメータ行列，$\boldsymbol{\varepsilon}$: $N\times p$ は誤差行列である．誤差に対しては，通常 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の各行は互いに独立で平均ゼロ，共通の分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ をもつことが仮定される．典型的な $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は