統計数理（1991）
第39巻 第2号 257-259

公開講演会要旨

か　た　ち　の　数　理

筑波大学　小　川　泰*

(1991年11月6日，統計数理研究所 講堂)

数年前のこと，ある大新聞が「ある土地をめぐって，遺産相続問題が起こった．その結果，図1の土地を兄弟4人に分割しなければならない．ただし，この分割は4人に等しく，つまりその広さが同じというワケ，ついでに工事費を節約するために，最も短い長さの線で分けることが望まれる．さて，うまく分割できるかな?」というパズルを掲載した．正解法の概略はすぐに見当がついたが，数値計算せずには粗い精度でしか答えが出せない．効率的な計算機プログラムを作ることもパズルとして興味深いが，2週間後に掲載されるという「正解」がそれを要求しているとは考えられない．どんな「正解」か楽しみに待った．案の定「正解」は図2であった．出題者は，正方形の土地なら図3のような「田の字」分割であることを前提にして，輪郭を凸凹させても基本方針は変えず，「気の効いた処理」ですむという発想に立っている．ところが正方形の場合に「田の字」という前提から間違っているのである．図4の方が，比率でいって98.8%と，僅かな差とはいえ境界が短い．表面張力で決まるシャボン玉の問題に近いことに気づけば，正解はともかくある種の誤答は見抜ける．

2次元の表面張力問題では，① 境界線は円弧，② その分岐は120度きざみのY字型で，③ 外周とは直交して終わり，④ 円弧の曲率は内外の圧力差に比例し，中心は高圧側にある．各領域にはそれぞれ圧力値が想定され，境界線を次々と越えて元の領域に戻ったら当然元の圧力に戻ることが，一つの条件となる．この4項はいずれも力のつりあいを考えれば納得できよう．普通のシャボン玉問題では，物質量が与えられていて圧縮されたりするのに，ここでは各領域の面積が与えられているという問題設定には違いがある．「田の字」はそれなりにつりあっているが，中央の十字分岐は不安定で，上記の①～④をみたすような二つのY字分岐に分裂する．

さて，冒頭のパズルの正解は図5である．①～④をみたし，長さは図2の「正解」の93.0%

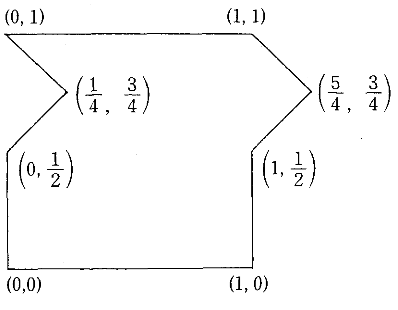

図1.

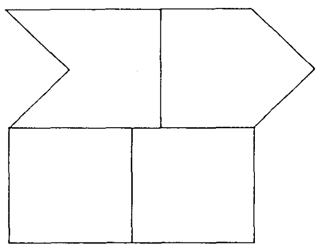

図2.

---

* 物理工学系：〒305 つくば市天王台1-1-1.

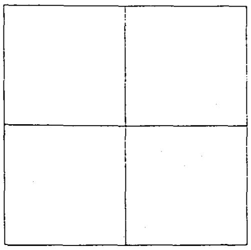

図3.

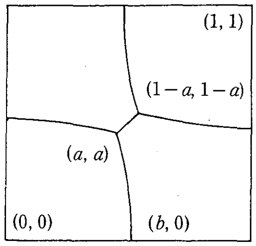

図4. $a=0.461041$.

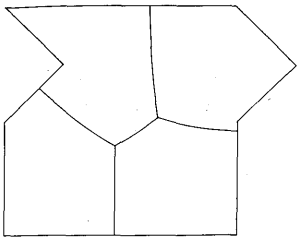

図5.

である．題意のように境界線を短くしようと思えば，突き出たところを利用するのが当然である．ただし各領域の面積を等しくという条件などの制約のために最突端は通らない．その意味で，数値的な精密さはともかく，いわば大ざっぱな「基本設計構想」としては正しい．①～④という美しい法則についての知識は，ある特定の分割がもっともらしいか？あるいは問題にならないものか？の判断には役立っても，「基本設計構想」を作るのに役立つとは限らない．その意味で，①～④とは別の法則表現を工夫することも重要であろう．この講演の冒頭でパズルを持ち出した理由はこのことをいいたかったからである．

なお，対応する3次元問題である極小曲面を求める問題はPlateau問題として知られているが，自然界では放散虫の骨格の形態などに見られ，人工物では軽量建築などに利用されている．かたちの数理法則の代表例である．

ここで話が変わるが，数学には不等式で表した定理も多い．円についてならば，「与えられた円に内接する n 角形のうち，面積最大のもの」も，「与えられた円に外接する n 角形のうち，面積最小のもの」も，いずれも正 n 角形である．要するに，円周は一様だから，その上に一様・等間隔に n 個の接点を取ったときに，n 角形が円周に最も近くなるということである．円の代わりに楕円や凸領域について考えるならば，「T を一つの凸領域とし，T_n をこれに内接する最大の面積の n 角形とする．すると $T_n \geqq T(n/2\pi)\sin(2\pi/n)$ が成り立ち，等号は楕円に対してのみ成り立つ.」という定理になる．ただし T や T_n は対応する図形の面積を表すが，ここでこの定理の詳細にこだわるわけではない．問題にしたいのは，楕円の場合ならば，等号に相当する n 角形はどういう n 角形か？いかにしてそれに到達できるのか？ということに関心が払われていないことである．一般の凸領域の場合ならばなおさらのこと，どのように n 個の接点を選べば良いのかの一般的な作戦まで議論したい．

これは，Fejes Tõth の『配置の問題』を，形の諸問題にとって重要な幾何学を共通の基盤とするために，研究室で輪講している際に感じたことである．この本はかたちの数理的な研究に

とって重要な事柄が集められた重要な文献である．ただし，基本的には数学の立場で書かれたものである．もちろん読者の側が進んでそこまで考えれば良いことには違いない．このような定理に出くわしたとき，学生達は，その証明らしきものはやらなければいけないと感じるらしい．しかし，なかなか一般的な作戦まで考えようという発想にはなってこない．そこで，現在の教育や，さらに幾何学的な科学のあり方を問題にしたくなるのである．証明あっての数学には違いなかろうが，数学者以外の者にとっては，手続きとしての証明自体よりも，その議論が何を慮ってのものなのか？ということの方が大事であろう．また，不等式は，その問題設定において結論できるギリギリのところなのかも知れないが，それで満足するのとは別の発想が必要なのではないかと思う．

さて，ここで強調しておきたいことは，科学の立場での幾何学の必要性である．一般人の常識では幾何学は図形の科学であろうが，数学としての幾何学では図形へのこだわりはない．一方，物理学は物質の法則を扱うものと思われている．しかし，物質という役者が演じる自然現象が，空間という舞台機構からどんな制約を受けているのかを分離するためには，空間の性質についてのわれわれの知識はまだまだ貧弱すぎる．その意味で，科学の前提としての空間の性質を調べる空間の科学としての幾何学は非常に重要である．もちろん証明できることは証明するに越したことはないが，少し前に述べたように，証明できることだけが重要なのではなく，事実の方を重視する．その意味でも科学の立場である．例えば，先ほどの『配置の問題』の訳者あとがきに樋口伊佐夫先生が挙げておられるように，球の不規則充塡の問題などは，さまざまな身近な現象と関係している．しかし，1次元の場合を除いては，証明などはおぼつかない．また，数学の立場では3次元を特別視する理由は無かろうが，科学の立場では3次元へのこだわりは重要である．証明困難だから扱わないということなく，3次元における「幾何現象」の科学を発展させたい．幾何学的な数理科学といってもよい．詳しくは述べないが，もちろん統計的な視点はそこにおいても重要である．なお，「かたちの数理」ということばを表題に用いたが，私が「かたち」という言葉を用いるとき，科学を生み出した西欧的なものの見方だけが唯一ではなく，東洋的・日本的な自然観など，文化の多様性を重視し，文化的な背景も考慮したものを思っている．不完全なたとえであるが，西洋庭園を幾何学的と表現するならば，「かたち」は，秩序の表現にも工夫を要する日本庭園に相当するともいえよう．

ここで述べたことは，既に何回か別のところに書いた部分も多い．より詳しくは，小川（1983, 1989, 1990a, 1990b, 1991）などを併せてお読みいただければ幸いである．

Tóth (1983) は重要な書物であるが，これに対応する科学の立場での書物が必要であろう．

参考文献

小川　泰 (1983).『形の物理学 —— 科学研究のあり方を考える』，モナドブックス 19，海鳴社，東京．
小川　泰 (1989).　物理のモデルと数学のモデル，数理科学，**4**, 5-8.
小川　泰 (1990a).　かたちの法則・法則のかたち，数理科学，**5**, 66-69.
小川　泰 (1990b).　物質は役者・法則は台本・空間は舞台，数理科学，**9**, 44-48.
小川　泰 (1991).　〈結晶〉・科学・文化，数理科学，**12**, 36-43.
Tóth, F. (1983).『配置の問題（平面・球面・空間における）』（樋口伊佐夫・種村正美 訳），みすず書房，東京．