

自己回帰 (AR) モデルの線形代数の 観点からの解釈

統計数理研究所 樋 口 知 之

(1990 年 5 月 受付)

1. はじめに

現在の時刻における値を過去の観測値の線形結合によって表現する自己回帰モデル (Auto-Regressive model, 以後 AR モデルと略す) は, そのモデルの簡便さなどから様々な分野において予測・制御に広く用いられている (尾崎 (1989)). 統計理論的な側面からの研究はもちろんのこと, モデルパラメーターの計算法に関しても多種多様な方法が提案, そして比較検討されてきた. その背景には, AR モデルとパワースペクトルの関係を使って, パワースペクトルの安定した良い推定値を求めたいという意図があった. とくに Burg による新しい計算法は, ちょうど実用に耐えうる計算機の出現とあいまって, スペクトル解析の分野に多くの研究者を引き込んだ (Burg (1975)). その後 AR モデルを用いたデータ処理は, 解析に十分なメモリーと計算速度を持った計算機が非常に手に入れやすくなったため, すっかり市民権を得た観がある (Ohtsu and Kitagawa (1984), Nakamura (1989), 尾崎 (1989), 石黒 (1989)). また計算機の驚異的な発達にしたがい, データの定常性などを仮定しない, より現実的な大規模モデルへと AR モデルは発展しており, その有効性と柔軟性が様々なデータへの応用を通して確立している (田村 (1984), 北川 (1986a, 1986b, 1989)).

本稿が取り扱うのは, 大規模ベイズモデルによる近代的な AR モデルではなく, すでに解析法などが確立された古典的 AR モデルである. この古典的 AR モデルに関する解説書は余りにも多く, 本稿では和書のいくつかを挙げるにとどめておきたい (赤池・中川 (1972), 藤井 (1974), 日野 (1977), 添田 他 (1979), 森下・小畑 (1982), 尾崎 (1989)). これらの多くはデータの定常性などを仮定し, アンサンブル平均操作を導入して, 様々な AR モデルの諸特性, パラメーター推定法などを概説している. ところが, 現実のデータは仮定した条件を十分満たすものか解らないし, またアンサンブル平均値などもともと定義できないのかもしれない. にもかかわらず, 現実にはデータを有限個のデータから推定した AR モデルを用いて表現している. したがって, もともとの AR モデルに仮定した前提を離れ, 有限データから推定した AR モデルは有限データをいかに表現しているのかを考察してみるといった, 逆の方向から AR モデルを見ることも可能である. 本稿では, AR モデルを有限個のデータの 1 つの表現方法として捉える. いままで我々が有限個のデータからモデル化してきた AR モデルは, 実際のデータをどのように表現しようとしていたのかを考えてみたいわけである.

AR モデルの持つ線形性から, それを線形代数の観点から見ると様々な性質が明瞭になってくるため, まず第 2 章で AR モデルの概説をし, その Vector-Matrix 表現を第 3 章で与える. そこでは諸性質がすべて Vector-Matrix 表現で示される. 第 4 章ではいろいろな説明法があるレビンソンのアルゴリズムを, 線形空間のベクトルの関係で捉える. 第 5 章では AR パラ

メーターの偏自己相関の代表的な推定方法を比較検討する。

2. 自己回帰 (AR) モデルの概説

本稿では1変量の時系列 $\{x(n)\}$ と表記, $1 \leq n \leq N$ を対象とする. ARモデルとは時刻 n の観測値 $x(n)$ を白色雑音 $\varepsilon(n)$ と過去の観測値 $x(m)$ ($m < n$) の線形結合で表すものである. とくに M 個の観測値を使うモデルを M 次 ARモデルという (尾崎 (1989)). 具体的に式で表すと,

$$(2.1) \quad x(n) = \sum_{m=1}^M a(m)x(n-m) + \varepsilon(n).$$

もちろん $a(m)$ は定数. ところで白色ガウス雑音 $\{\varepsilon(n)\}$ は互いに相関を持たない平均0, 分散 (σ^2) 一定の確率変数の列であるから, 以下のような良く知られた関係式が得られる.

$$(2.2) \quad E\{\varepsilon(n)x(n)\} = E\{\varepsilon^2(n)\} = \sigma^2$$

$$(2.3) \quad E\{x(n)x(n-j)\} = \sum_{m=1}^M a(m)E\{x(n-m)x(n-j)\} + \sigma^2\delta_{j,0}$$

$E\{\cdot\}$ はアンサンブル平均, $\delta_{i,j}$ はクロネッカー記号を表す. 式 (2.3) は

$$(2.4) \quad E\{\varepsilon(n)x(n-j)\} = E\left\{\left(x(n) - \sum_{m=1}^M a(m)x(n-m)\right) \cdot x(n-j)\right\} = 0 \quad (1 \leq j)$$

とも解釈できる. $\{x(n)\}$ の自己共分散関数を

$$(2.5) \quad C(j) = E\{x(n)x(n-j)\}$$

と表記すると上式 (2.3) は次のように書ける.

$$(2.6) \quad C(j) = \sum_{m=1}^M a(m)C(j-m) + \sigma^2\delta_{j,0}$$

とくに $\{x(n)\}$ が2次定常ならば $C(j) = C(-j)$ なので, (2.6) はさらに

$$(2.7) \quad C(j) = \sum_{m=1}^M a(m)C(|j-m|) + \sigma^2\delta_{j,0}$$

となる. 以上は M 次 AR過程の基本的な関係式だが, 以後の説明のため次のような性質も成り立つことを明らかにしておこう. 式 (2.4) の性質および自己共分散関数の原点对称性を使って,

$$(2.8) \quad E\{\varepsilon(n-M-1)x(j)\} = E\left\{\left(x(n-M-1) - \sum_{m=1}^M a(m)x(n-M-1+m)\right) \cdot x(j)\right\} \\ = 0 \quad (1 \leq j \leq M).$$

これは $x(n-M-1)$ が M 次の ARモデルの係数 $\{a(m)\}$ を用いて,

$$(2.9) \quad x(n-M-1) = \sum_{m=1}^M a(m)x(n-M-1+m) + \varepsilon(n-M-1)$$

と書けることを意味している.

$$(3.5) \quad \|X_0\| = \|X_1\| = \|X_2\| = \cdots = \|X_{M-1}\| = \|X_M\|.$$

最小2乗法は第 p ($M+1 \leq p$) 行目から第 N 行目まで、列は第1~ $M+1$ 列を使ってパラメータを推定する。普通は $p=M+1$ を最小2乗法によるパラメータ推定と呼ぶ。ただしARモデルを採用するときはモデル次数 M の選択に注意が必要で、またそのモデル選択に情報量規準 AIC を使うときには、いま考慮している最大モデル次数を p の値として採用する(坂元他(1983))。

$\{x(n)\}$ の自己共分散関数 $C(j)$ の推定値 $\hat{C}(j)$ をベクトル間の内積

$$(3.6) \quad \hat{C}(|l-m|) \equiv \frac{X_m \cdot X_l}{\dim(X_i)}$$

で与える。ここで $\dim(\cdot)$ はベクトルの次元を示す。当然 $\dim(X_i)$ は i によらない。この値は、パラメータ推定法を決めると、前述したように具体的に書き下せる。一般に $X_m \cdot X_l$ の値は $|l-m|$ の関数にはならない(つまり、 $i \neq j$ のとき $X_i \cdot X_{i+k} \neq X_j \cdot X_{j+k}$ である)が、時系列の場合は式(3.1)を見て解るように、 $|l-m|$ が等しくあればほぼ同じ値である(ただしYW法のときは完全に $|l-m|$ の関数)。つまり、ベクトルの内積 $X_m \cdot X_l$ を $\dim(X_i)C(|l-m|)$ でほぼ近似できる。 $x(1), x(2), \dots, x(M_{\max})$ と $x(N-M_{\max}+1), x(N-M_{\max}+2), \dots, x(N)$ に異常な値が含まれていない限り、 $X_m \cdot X_l$ はすべての l, m に対し $|l-m|$ の関数になっていると考えて良い。とくに N の値が M_{\max} と比較して十分大きければ、上記の仮定はほとんど受け入れられる。この仮定をしないことは、時系列の初期値(と終値)の効果を考慮することに、つまり boundary condition を厳密に考えることに還元される。以後の関係式で使われる \equiv は、この仮定が成立するときは厳密に等号が成り立つが、成立しないときはほぼ等しいことを示す(近似)式であることを表す(ただし、何度も繰り返すが、YW法のときは近似式ではなく正確に成り立つ式を意味する)。つまり、 \equiv で結び付けられる関係式は、2つのベクトル間の内積の値を $\dim(X_i)C(|l-m|)$ で置き換える操作を含むことを明示している。この仮定は、各ベクトルのノルムの一致性(関係式(3.5))をも含んでいることにも注意しておきたい。

式(3.6)にあるように以後ベクトルを2つ並べたものは内積を意味し、いちいち $a^T \cdot b$ のように転置記号 T を書かないことにする。また式(2.2)より

$$(3.7) \quad \sigma_M^2 = \frac{\|\epsilon_F\|^2}{\dim(\epsilon_F)}$$

である。 σ_M^2 の添え字 M は、モデル次数が M のときの σ^2 であることを表している。

以上で Vector-Matrix 表現の道具だては揃い、以降は線形代数の観点からARモデルを考察してみる。もう一度 M 次のARモデルの Vector-Matrix 表現を思い出すと、

$$(3.8) \quad X_0 = \sum_{m=1}^M a(m)X_m + \epsilon_F.$$

このときのARモデルの係数 $\{a(m)\}$ の推定法には、いくつかの流儀があるが、いずれにしても次のような(予測)誤差の2乗 Z_F をなるべく小さくするように決定するのが自然である(尾崎(1989))。いま、 $\{a(m)\}$ を Z_F を最小にするように決定したとしよう(つまり、最小2乗法を採用したとする)。

$$(3.9) \quad Z_F \equiv \left\| X_0 - \sum_{m=1}^M a(m)X_m \right\|^2 = \|\epsilon_F\|^2$$

ここで添え字の F は、この距離が前向き (Forward) の予測誤差に対応していることを示している。ユークリッド空間では、 Z_F のような距離の 2 乗 (距離でも同じ) を最小とするような $\{a(m)\}$ を求めることは、 \mathbf{X}_0 の M 個のベクトル $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M\}$ を基底とする線形部分空間 V_M への射影と等価である (回帰モデルの線形空間での解釈は、佐和 (1979) の図 4.1 を参考にしたい)。したがって M 次の AR モデルの $\boldsymbol{\varepsilon}_F$ は、 \mathbf{X}_0 の V_M への垂線であり、すべての基底ベクトル $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M\}$ と直交しているわけである。つまり $\boldsymbol{\varepsilon}_F$ は V_M の直交補空間 V_M^\perp に属している。射影ベクトルの各 \mathbf{X}_m の係数は、AR モデルのパラメーター $a(m)$ である。

以上の幾何的な解釈の後には様々な AR モデルの諸性質が明瞭になってくる。前述したように、 $\boldsymbol{\varepsilon}_F$ は $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M\}$ と直交しているので、

$$(3.10) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_F \cdot \mathbf{X}_m = 0 \quad (m=1, \dots, M)$$

となり、これは式 (2.4) の Vector-Matrix 表現である。また、式 (2.5), (2.6) などは \mathbf{X}_0 と \mathbf{X}_j の内積を書き下しただけである。つまり、

$$(3.11) \quad \mathbf{X}_0 \mathbf{X}_j = \left(\sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_F \right) \mathbf{X}_j = \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_m \mathbf{X}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_F \mathbf{X}_j$$

で、両辺をベクトルの次元数 $\dim(\mathbf{X}_i)$ で割ると ($\dim(\mathbf{X}_i)$ はもちろん i に依存しない)、

$$(3.12) \quad \widehat{C}(j) \doteq \sum_{m=1}^M a(m) \widehat{C}(|j-m|) + \sigma_M^2 \delta_{j,0}$$

となり、式 (2.7) が簡単に得られる。さらにこの式の $j=0$ のときの関係式は、

$$(3.13) \quad \mathbf{a}_M = [a(1), a(2), \dots, a(M)]^T$$

および

$$(3.14) \quad \mathbf{c}_M = [\widehat{C}(1), \widehat{C}(2), \dots, \widehat{C}(M)]^T$$

とおくと

$$(3.15) \quad \widehat{C}(0) \doteq \mathbf{c}_M \mathbf{a}_M + \sigma_M^2$$

と簡単に書ける。この式も \mathbf{X}_0 のノルムの 2 乗 $\|\mathbf{X}_0\|^2$ を考えればすぐに理解できる。また $j \neq 0$ のとき、つまり $j=1, \dots, M$ に対して成り立つ (3.12) 式を Yule-Walker 方程式という。

$$(3.16) \quad \widetilde{C}_M = \begin{pmatrix} \widehat{C}(0) & \widehat{C}(1) & \widehat{C}(2) & \cdots & \widehat{C}(M-1) \\ \widehat{C}(1) & \widehat{C}(0) & \widehat{C}(1) & & \widehat{C}(M-2) \\ \widehat{C}(2) & \widehat{C}(1) & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \widehat{C}(M-1) & \widehat{C}(M-2) & \cdots & \widehat{C}(1) & \widehat{C}(0) \end{pmatrix}$$

とおくと、YW 方程式は簡単に

$$(3.17) \quad \widetilde{C}_M \mathbf{a}_M \doteq \mathbf{c}_M$$

と書ける。

また (3.12) 式において $j=1, \dots, M$ の $\widehat{C}(j)$ は、 j を $j=M+1-k$ と付けかえることにより

$$(3.18) \quad \widehat{C}(M+1-k) \doteq \sum_{m=1}^M a(m) \widehat{C}(|M+1-k-m|)$$

と書ける。ただし k の取りうる範囲は $1 \leq k \leq M$ である。さらに変形すると

$$(3.19) \quad \mathbf{X}_k \mathbf{X}_{M+1} \doteq \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_k \mathbf{X}_{M+1-m}.$$

したがって

$$(3.20) \quad \mathbf{X}_k \left(\mathbf{X}_{M+1} - \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_{M+1-m} \right) \doteq 0.$$

$$(3.21) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_B = \mathbf{X}_{M+1} - \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_{M+1-m}$$

とおくと

$$(3.22) \quad \mathbf{X}_k \boldsymbol{\varepsilon}_B \doteq 0 \quad (k=1, \dots, M)$$

で、さらに

$$(3.23) \quad \mathbf{X}_{M+1} \doteq \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_{M+1-m} + \boldsymbol{\varepsilon}_B$$

と表せる。ここで \mathbf{X}_{M+1} は $\mathbf{X}_{M+1} = B\mathbf{X}_M$ で定義されるベクトルである。式 (3.10) は厳密に成り立つが、式 (3.22) は近似式である (仮定 (3.6) が成り立つときは、厳密に成り立つ) ことに注意したい。一般に式 (3.21) で定義される $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ のノルムに関して、 $\|\boldsymbol{\varepsilon}_B\| \neq \|\boldsymbol{\varepsilon}_F\|$ であるが、仮定 (3.6) のもとで $\|\boldsymbol{\varepsilon}_B\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}_F\|$ になる。式 (3.22) から、 $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ は $\{\mathbf{X}_m \mid m=1, \dots, M\}$ のすべてのベクトルに (ほぼ) 直交しており、この式は \mathbf{X}_{M+1} の V_M への射影を表している。よって、 $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ は (近似的に) \mathbf{X}_{M+1} の V_M への垂線と解釈される。(3.23) 式の重要な点は、射影ベクトルの \mathbf{X}_k の係数が $a(M+1-k)$ で与えられることで、これは 1 変数時系列の AR モデルにおける特徴である。これらの議論から、

$$(3.24) \quad Z_B \equiv \left\| \mathbf{X}_{M+1} - \sum_{m=1}^M a(m) \mathbf{X}_{M+1-m} \right\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}_B\|^2$$

で定義される距離の 2 乗も、(ほぼ) 最小となっていることが解る。添え字の B は、この Z_B が後向き (Backward) の予測誤差に対応していることを表す。しかしながら、上述したように厳密に Z_B が Z_F を最小にする $\{a(m)\}$ で最小になっているかは解らず、一般には仮定 (3.6) が近似的に成り立つのでほぼ最小となっている。

この章を終わるにあたってもう一度 M 次の AR モデルについてまとめると、 M 次の AR モデルは \mathbf{X}_0 の $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M\}$ を基底とする線形部分空間 V_M への写影であり、基底ベクトルの $\{\mathbf{X}_m\}$ の係数が $a(m)$ で与えられる。したがって前向きの予測誤差を表すベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_F$ は、 \mathbf{X}_0 の V_M への垂線である。このとき前向きの予測誤差 $\|\boldsymbol{\varepsilon}_F\|^2 = Z_F$ は最小となっている。1 変数 AR モデルのときは自己共分散関数が偶関数である (仮定 (3.6) が成り立っている) ことから、次のような特性がある。 M 次の AR モデルは、 \mathbf{X}_{M+1} の線形部分空間 V_M への写影を考えたととき、基底ベクトルの $\{\mathbf{X}_m\}$ の係数が $a(M+1-m)$ で与えられる。後向きの予測誤差を表すベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ は、 \mathbf{X}_{M+1} の V_M への垂線であり、後向きの予測誤差 $\|\boldsymbol{\varepsilon}_B\|^2 = Z_B$ も Z_F 同様最小になっている。

4. レビンソンのアルゴリズム

M 次の AR モデルを記述するパラメーター $\{\mathbf{a}_M, \sigma_M^2\}$ を求めるのに, \mathbf{c}_M と $\widehat{C}(0)$ を計算して (3.17) 式の連立 1 次方程式を解く方法が考えられるが, この計算を能率良く行う方法がレビンソンのアルゴリズムである (Levinson (1947), 添田 他 (1979), 尾崎 (1989)). このアルゴリズムは一見複雑そうだが, 幾何的な観点から眺めると非常にすっきりしてくる. レビンソンのアルゴリズムは, 一言でいうと M 次の AR モデルパラメーター $\{\mathbf{a}_M, \sigma_M^2\}$ と $M+1$ 次の AR パラメーター $\{\mathbf{a}_{M+1}, \sigma_{M+1}^2\}$ の間の漸化式を与えるものである. モデル次数をはっきり示すため

$$\mathbf{a}_M = [a^M(1), a^M(2), \dots, a^M(M)]^T$$

と上付き添え字を付ける. 同様に M 次の前向きと後向き予測誤差を表すベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\varepsilon}_F^M$ および $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ と書く.

$M+1$ 次の AR モデルは $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M, \mathbf{X}_{M+1}\}$ の $M+1$ 個の基底ベクトルの張る線形部分空間 V_{M+1} への \mathbf{X}_0 の射影である. 求めたいのは \mathbf{a}_M と σ_M^2 が既知のもとでの, \mathbf{X}_0 の V_{M+1} への射影ベクトルの係数

$$\mathbf{a}_{M+1} = [a^{M+1}(1), a^{M+1}(2), \dots, a^{M+1}(M), a^{M+1}(M+1)]^T$$

である. \mathbf{X}_0 の V_M への射影ベクトルの係数は解っているので ((3.2) 式で与えられる), V_M に 1 つ基底ベクトル (\mathbf{X}_{M+1}) の加わった線形部分空間 V_{M+1} への \mathbf{X}_0 の射影は, $\boldsymbol{\varepsilon}_F^M$ の \mathbf{X}_{M+1} への射影成分だけを考えれば良い.

ところで (3.23) 式を見ると, \mathbf{X}_{M+1} は V_M への射影 $\sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_{M+1-m}$ と, (近似的な) 垂線 $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ に分解されている. この垂線は当然 V_{M+1} には含まれているが V_M には属していない. $V_{M+1} - V_M$ の部分空間にはいつている. いいかえると \mathbf{X}_{M+1} の $V_{M+1} - V_M$ への射影ベクトルは $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ である. したがって $\boldsymbol{\varepsilon}_F^M$ は

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_F^M \doteq \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_B^M + \boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}$$

と分解できる. ただし α は実数. 右辺の第 1 項は $V_{M+1} - V_M$ への射影を, 第 2 項は V_{M+1}^\perp への射影を表している. 当然 $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}$ は直交している. また, $M+1$ 次の AR モデルの前向きの予測誤差分散 Z_F^{M+1} は

$$(4.2) \quad Z_F^{M+1} = \|\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}\|^2 \doteq \|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M - \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2 = \alpha^2 \|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2 - 2\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_F^M \boldsymbol{\varepsilon}_B^M + \|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M\|^2$$

で与えられる.

(4.1) を

$$(3.2') \quad \mathbf{X}_0 = \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_F^M$$

に代入すると

$$(4.3) \quad \mathbf{X}_0 \doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_m + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_B^M + \boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}.$$

さらに $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ を (3.23) 式から $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M\}$ で表すと,

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad X_0 &\doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) X_m + \alpha \left(X_{M+1} - \sum_{m=1}^M a^M(m) X_{M+1-m} \right) + \varepsilon_F^{M+1} \\
 &= \sum_{m=1}^M a^M(m) X_m + \alpha \left(X_{M+1} - \sum_{m=1}^M a^M(M+1-m) X_m \right) + \varepsilon_F^{M+1} \\
 &= \sum_{m=1}^M (a^M(m) - \alpha a^M(M+1-m)) X_m + \alpha X_{M+1} + \varepsilon_F^{M+1}
 \end{aligned}$$

となる。\$M+1\$ 次の AR モデルは

$$(4.5) \quad X_0 = \sum_{m=1}^{M+1} a^{M+1}(m) X_m + \varepsilon_F^{M+1}$$

であるから、(4.4) と (4.5) を比較することで、実は

$$(4.6) \quad \alpha \doteq a^{M+1}(M+1)$$

であることが解る。この \$a^{M+1}(M+1)\$ のことを偏自己相関 (Partial Auto Correlation Coefficient, 略して PARCOR) という。簡単のために \$a^{M+1}(M+1)\$ を \$\gamma_{M+1}\$ と書こう。さらに \$X_m\$ の係数比較から

$$(4.7) \quad a^{M+1}(m) \doteq a^M(m) - \gamma_{M+1} a^M(M+1-m) \quad (m=1, \dots, M)$$

が得られる。

(4.7) から、(4.1) は結局

$$(4.8) \quad \varepsilon_F^M \doteq \gamma_{M+1} \varepsilon_B^M + \varepsilon_F^{M+1}$$

となり、(ほぼ) \$\varepsilon_B^M \perp \varepsilon_F^{M+1}\$ であるから、\$\gamma_{M+1}\$ は \$\varepsilon_F^M\$ と \$\varepsilon_B^M\$ のなす角度を \$\theta_M\$ とすると

$$(4.9) \quad \gamma_{M+1} \doteq \frac{\|\varepsilon_F^M\| \cos(\theta_M)}{\|\varepsilon_B^M\|} = \frac{\varepsilon_F^M \varepsilon_B^M}{\|\varepsilon_B^M\|^2}$$

で与えられる。この解は次のような観点からも求められる。(4.2) は実は

$$(4.10) \quad Z_F^{M+1} = \|\varepsilon_F^{M+1}\|^2 \doteq \|\varepsilon_F^M - \gamma_{M+1} \varepsilon_B^M\|^2 = \gamma_{M+1}^2 \|\varepsilon_B^M\|^2 - 2\gamma_{M+1} \varepsilon_F^M \varepsilon_B^M + \|\varepsilon_F^M\|^2$$

であるので、この \$Z_F^{M+1}\$ を最小にする \$\gamma_{M+1}\$、つまり

$$(4.11) \quad \partial Z_F^{M+1} / \partial \gamma_{M+1} = 0$$

の解が (4.9) で与えられる。(4.9) で注目したい点は、\$M+1\$ 次の偏自己相関の計算に \$\widehat{C}(M+1)\$ を必要としないことである。

(4.3) は

$$(4.12) \quad X_0 \doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) X_m + \gamma_{M+1} \varepsilon_B^M + \varepsilon_F^{M+1}$$

となる。この式と \$X_{M+1}\$ の内積を求めると

$$(4.13) \quad X_0 X_{M+1} \doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) X_m X_{M+1} + \gamma_{M+1} \varepsilon_B^M X_{M+1} + \varepsilon_F^{M+1} X_{M+1}.$$

\$\varepsilon_F^{M+1} X_{M+1} = 0\$ に注意すると、さらに変形できて

$$(4.14) \quad \widehat{C}(M+1) \doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) \widehat{C}(M+1-m) + \gamma_{M+1} \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2}{\dim(\boldsymbol{\varepsilon}_B^M)}$$

となり、結局

$$(4.15) \quad \gamma_{M+1} \doteq \frac{\widehat{C}(M+1) - \sum_{m=1}^M a^M(m) \widehat{C}(M+1-m)}{\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2}{\dim(\boldsymbol{\varepsilon}_B^M)}}$$

が得られる。(4.8)より

$$(4.16) \quad \dim(\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1})\sigma_{M+1}^2 \doteq \|\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M\|^2 - \gamma_{M+1}^2 \|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2$$

が得られる。もし $\widehat{C}(M+1)$ が与えられれば (4.15) で γ_{M+1} が求められ、(4.7) を使って \boldsymbol{a}_M から \boldsymbol{a}_{M+1} が計算できる。さらに $M+1$ 次の AR モデルを記述するのに必要なパラメータ σ_{M+1}^2 は (4.16) から計算できる。

仮定 (3.6) が成り立つときの $\boldsymbol{\varepsilon}_F^M, \boldsymbol{\varepsilon}_B^M, \boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}, X_0$, そして X_{M+1} の構成が図 1 に模式的に示してある。 $\sum_{m=1}^M a^M(m) X_m$ を表す太い矢印は V_M 内にある。したがって平面 V_{M+1} は V_M とそれに直角な座標、つまり $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ 方向 (近似的に直角) で構成されている。もちろん X_{M+1} はこの平面内にある。平面に垂直な成分は V_{M+1}^\perp を表す。 $\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}$ は V_{M+1} 平面に垂直であり、したがって $\boldsymbol{\varepsilon}_F^{M+1}$ と X_{M+1} とは直交している。太い矢印と $\boldsymbol{\varepsilon}_F^M$ および $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M$ は直交している点にも留意したい。

前述したように一般には $\|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M\| \neq \|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|$ であるが、仮定 (3.6) のもとでは $\|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}_B^M\|^2$ となり、したがって $\|\boldsymbol{\varepsilon}_F^M\|^2 = \dim(\boldsymbol{\varepsilon}_F^M)\sigma_M^2$ なので、(4.15) は

$$(4.17) \quad \gamma_{M+1} = \frac{\widehat{C}(M+1) - \sum_{m=1}^M a^M(m) \widehat{C}(M+1-m)}{\sigma_M^2}$$

となる。また (4.16) は結局

$$(4.18) \quad \sigma_{M+1}^2 = (1 - \gamma_{M+1}^2) \sigma_M^2$$

で σ_{M+1}^2 と σ_M^2 の関係式が与えられる。また (4.9) は

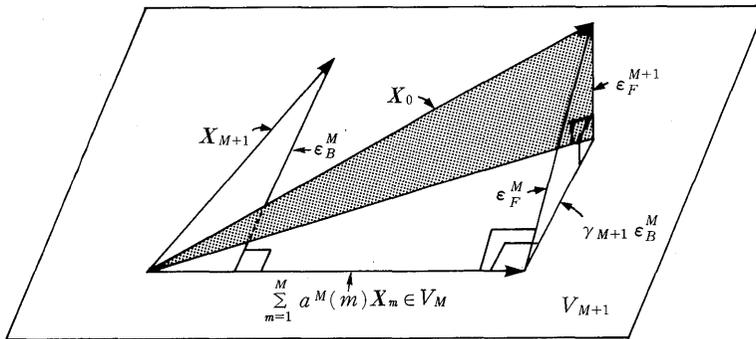


図 1.

$$(4.19) \quad \gamma_{M+1} = \cos(\theta_M)$$

になってしまう。(4.18)と(4.19)より

$$(4.20) \quad \sigma_{M+1}^2 = \sin^2(\theta_M)\sigma_M^2$$

で、したがって

$$(4.21) \quad \|\mathbf{e}_F^{M+1}\| = \|\mathbf{e}_F^M \sin(\theta_M)\|$$

であることが明示される。

5. 偏自己相関の決定法

第4章に述べたものがレビンソンのアルゴリズムで、以下に具体的な計算方法を述べる。

YW法は、まず $\hat{C}(0)$ を計算する。次に $\hat{C}(1)$ を求め、(4.15)を使って1次の偏自己相関 $a^1(1)(\gamma_1)$ を計算する。(4.16)から σ_1^2 も計算できる。以下、 $\hat{C}(2)$ から $\{a^2(1), a^2(2) (= \gamma_2), \sigma_2^2\}$ が計算できるといったふうに、1つ高いモデルの自己共分散を計算して(4.15)と(4.16)を使えば、高次のARモデルのパラメーターが逐次的に定まる(石黒(1982), 尾崎(1989))。ただし、このようにして決められたAR係数は前向き予測誤差を厳密に最小にしているかは解らない。なぜならば、このアルゴリズムは式(3.21)で定義される後向き予測誤差が厳密に最小になっている(\mathbf{e}_F^M が厳密に V_M に垂直になっている)ことを利用しているが、これは仮定(3.6)が成り立つもとでしかいえない。したがって、直接前向き予測誤差を最小にするように決めた(最小2乗法で決めた)AR係数と、レビンソンのアルゴリズムによって逐次的に決めたAR係数(例えば、Burg法(添田 他(1979)))は一般には一致しない。

YW法は(4.15)を使うため、偏自己相関 γ_{M+1} を計算するのに自己共分散関数 $\hat{C}(M+1)$ を決定しなければならない。偏自己相関さえ求めれば、後の諸パラメーターはすべて決定できるので、偏自己相関を決定しさえすれば良い。これにはいろいろな方法がある(Haykin and Kesler(1979), Kay and Marple(1981))。

(4.9)にあるように、 M 次のARパラメーターから偏自己相関(γ_{M+1})は求められる(ただし、この式はあくまでも仮定(3.6)が成立するときに厳密に成り立つ式であり、一般には近似式である)。この方法は(4.11)に示したように、 $M+1$ のモデルの前向き予測誤差 Z_F^{M+1} を(一般には、ほぼ)最小にするように決定したものである。

ここで偏自己相関の求め方を統一的に解釈するため以下のような量を考えてみよう。

$$(5.1) \quad \begin{aligned} S_F^{M+1} &= \|\mathbf{e}_F^M - \gamma_{M+1}\mathbf{e}_B^M\|^2 = Z_F^{M+1} \\ S_B^{M+1} &= \|\mathbf{e}_B^M - \gamma_{M+1}\mathbf{e}_F^M\|^2 \end{aligned}$$

そして、この2つの量の平均値である

$$(5.2) \quad S^{M+1} = \frac{S_F^{M+1} + S_B^{M+1}}{2}.$$

S_F^{M+1} は $M+1$ 次のARモデルの前向き予測誤差 Z_F^{M+1} である。この S_F^{M+1} を最小にすることは、 \mathbf{X}_0 を V_{M+1} に射影することと(ほぼ)等価であった。または \mathbf{X}_{M+2} を V_{M+1} に射影することとも(近似的に)同じであった。一方 S_B^{M+1} はどのような量なのか詳しく考察してみよう。 \mathbf{e}_B^M は $V_{M+1} - V_M$ に(ほぼ)含まれるベクトルである。つまり(近似的に) \mathbf{X}_{M+1} の V_M への

垂線であった。いま \mathbf{X}_{M+1} を $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M\}$ の張る空間 (V_{M+1}^* と書こう) へ射影することを考えると, (3.23) より V_M への射影は定まっているので, 後は \mathbf{e}_B^M の $V_{M+1}^* - V_M$ への射影が決まれば良い。 \mathbf{e}_F^M は \mathbf{X}_0 の V_M への垂線であったので, つまり $V_{M+1}^* - V_M$ の基底ベクトルにとれるので, \mathbf{e}_B^M は (4.1) と同様に

$$(5.3) \quad \mathbf{e}_B^M \doteq \beta \mathbf{e}_F^M + \xi_B^{M+1}$$

と書ける。ただし β は実数。ここで ξ_B^{M+1} は \mathbf{X}_{M+1} の V_{M+1}^* への垂線 (当然 $\mathbf{e}_F^M \perp \xi_B^{M+1}$)。したがって, β は $\|\xi_B^{M+1}\|^2$ を最小にするような実数であり, またこのとき \mathbf{X}_{M+1} は V_{M+1}^* への射影となっている。

(5.3) より \mathbf{X}_{M+1} は

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_{M+1} &\doteq \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_{M+1-m} + \beta \mathbf{e}_F^M + \xi_B^{M+1} \\ &= \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_{M+1-m} + \beta \left(\mathbf{X}_0 - \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_m \right) + \xi_B^{M+1} \\ &= \sum_{m=1}^M a^M(m) \mathbf{X}_{M+1-m} + \beta \left(\mathbf{X}_0 - \sum_{m=1}^M a^M(M+1-m) \mathbf{X}_{M+1-m} \right) + \xi_B^{M+1} \\ &= \sum_{m=1}^M (a^M(m) - \beta a^M(M+1-m)) \mathbf{X}_{M+1-m} + \beta \mathbf{X}_0 + \xi_B^{M+1} \end{aligned}$$

と表される。

ところで式 (5.1) の S_F^{M+1} を最小にするように求めた $M+1$ 次の AR モデルの係数は, \mathbf{X}_{M+2} を

$$(5.5) \quad \mathbf{X}_{M+2} \doteq \sum_{m=1}^{M+1} a^{M+1}(m) \mathbf{X}_{M+2-m} + \mathbf{e}_B^{M+1}$$

のように表現したときの $\|\mathbf{e}_B^{M+1}\|$ を (ほぼ) 最小にするが, \mathbf{X}_{M+1} を

$$(5.6) \quad \mathbf{X}_{M+1} \doteq \sum_{m=1}^{M+1} a^{M+1}(m) \mathbf{X}_{M+1-m} + \xi_B^{M+1}$$

と表したときの $\|\xi_B^{M+1}\|$ をも (ほぼ) 最小にしている。それは, 式 (3.18) から式 (3.24) までの変形を参考にすればすぐ解る。(5.4) と (5.6) の \mathbf{X}_i の各係数を比較して,

$$(5.7) \quad \beta \doteq a^{M+1}(M+1)$$

となり, (5.3) から

$$(5.8) \quad \xi_B^{M+1} \doteq \mathbf{e}_B^M - a^{M+1}(M+1) \mathbf{e}_F^M$$

が得られる。よって S_B^{M+1} は $S_B^{M+1} = \|\xi_B^{M+1}\|^2$ である。この S_B^{M+1} を最小にすることは, \mathbf{X}_{M+1} を V_{M+1}^* に射影することと等価であることはいうまでもあるまい。

もう一度繰り返すと, $M+1$ 次の AR モデルは

$$(5.9) \quad \mathbf{X}_0 = \sum_{m=1}^{M+1} a^{M+1}(m) \mathbf{X}_m + \mathbf{e}_F^{M+1}$$

であり, モデルパラメーター $a^{M+1}(1), a^{M+1}(2), \dots, a^{M+1}(M+1)$ は $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M\}$ 間の拘束条件 $\|\mathbf{e}_F^{M+1}\|^2 \rightarrow \min.$ を満たすように決定した。このようにして定めた係数は, $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M, \mathbf{X}_{M+1}\}$ 間の拘束条件である $\|\mathbf{e}_B^{M+1}\|^2$ も同時に (ほぼ) 最小にする。このとき, $\|\mathbf{e}_F^{M+1}\|^2 \rightarrow \min.$

の条件と同じ $\{X_0, X_1, \dots, X_M\}$ 間の拘束条件である $S_B^{M+1} \rightarrow \min.$ の条件は, $\|\epsilon_B^{M+1}\|^2 \rightarrow \min.$ 同様 (ほぼ) 満たされている. ただし, $S_B^{M+1} \rightarrow \min.$ の条件で求めた係数 $\{a^{M+1}(m)\}$ と S_F^{M+1} で決定した係数 $\{a^{M+1}(m)\}$ とは一般には一致しない (もちろん, 仮定 (3.6) が成り立つときには一致する).

$M+1$ 次の偏自己相関 γ_{M+1} を, もととの AR モデルの定義から式 (3.9) で与えられるような前向き予測誤差の 2 乗を最小にするように決定するときには, その最適解の探索に前向き予測誤差の 2 乗 (の近似式) である S_F^{M+1} の最小化を使う. そのようにして求めた γ_{M+1} を整理のためにもう一度記すと,

$$(5.10) \quad \gamma_{M+1} = \frac{\epsilon_F^M \epsilon_B^M}{\|\epsilon_B^M\|^2}$$

となる. また, 後向き予測誤差の 2 乗 (の近似式である) S_B^{M+1} を最小にするように偏自己相関を決定すると,

$$(5.11) \quad \gamma_{M+1} = \frac{\epsilon_F^M \epsilon_B^M}{\|\epsilon_F^M\|^2}$$

が得られる. また著名な Burg 法は S_F^{M+1} と S_B^{M+1} の平均値を, つまり前向きと後向き予測誤差の 2 乗の平均値を小さくするように偏自己相関を決める (添田 他 (1979), Burg (1981)). 実際 $S^{M+1} = (S_F^{M+1} + S_B^{M+1})/2$ を γ_{M+1} で微分して最適解を求めると

$$(5.12) \quad \gamma_{M+1} = \frac{2\epsilon_F^M \epsilon_B^M}{\|\epsilon_F^M\|^2 + \|\epsilon_B^M\|^2}$$

となる. また他に

$$(5.13) \quad \gamma_{M+1} = \frac{\epsilon_F^M \epsilon_B^M}{\|\epsilon_F^M\| \|\epsilon_B^M\|} = \cos(\theta_M)$$

といった決め方もある (森下・小畑 (1982), 北川 (1986b)). ここで $\cos(\theta_M)$ は, ϵ_F^M と ϵ_B^M のなす角. この γ_{M+1} は, 前向き予測誤差ベクトルの成分と後向き予測誤差ベクトルの成分間の相互相関係数とみなせる (森下・小畑 (1982)). 以上の 4 つの決め方の偏自己相関をそれぞれ $\gamma_F, \gamma_B, \gamma_{Bg}$, そして γ_G と記し, また簡単のために $p = \epsilon_F^M, q = \epsilon_B^M$ とおこう. そうすると,

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \gamma_F &= \frac{pq}{\|q\|^2} \\ \gamma_B &= \frac{pq}{\|p\|^2} \\ \gamma_{Bg} &= \frac{2pq}{\|p\|^2 + \|q\|^2} \\ \gamma_G &= \frac{pq}{\|p\| \|q\|} \end{aligned}$$

となる. γ_{Bg} は γ_F と γ_B の調和平均, また γ_G は γ_F と γ_B の幾何平均である. 4 つの偏自己相関の値は $\|p\| = \|q\|$ のときに一致する. YW 法による推定の場合は, (3.5) で示されるようにベクトルのノルムがすべて等しいので, (3.9), (3.24) で与えられる前向きと後向き予測誤差の 2 乗, つまり $\|p\|^2$ と $\|q\|^2$ の値が等しくなる. したがって上に述べたように, 4 つの偏自己相関の推定値がすべて同じになる. 仮定 (3.6) のもとでは, 第 4 章に述べたように $\|\epsilon_F^M\|^2 = \|\epsilon_B^M\|^2$

となり、つまり $\|p\|^2 = \|q\|^2$ なので、式 (5.14) の 4 通りの値は一致する。

レビンソンのアルゴリズムは (4.18) を使って、推定した PARCOR γ_{M+1} から $M+1$ 次のモデルの予測誤差の 2 乗和平均である σ_{M+1}^2 を求めるが、PARCOR が 1 より大きいと予測誤差の 2 乗和が負になってしまう不都合がおこる。したがって、PARCOR の値が 1 より大きいか、それとも 1 以下であるかは重要な問題である。式 (5.14) を見て解るように、 γ_F^2 や γ_B^2 が 1 以下かどうかは示されないが、 γ_{Bg} や γ_C については以下のような性質を明示することができる。相加相乗平均の関係式と Schwarz の不等式より、 $pq \geq 0$ のときに

$$\frac{\|p\|^2 + \|q\|^2}{2} \geq \sqrt{\|p\|^2 \|q\|^2} = \|p\| \|q\| \geq pq$$

$$\frac{2pq}{\|p\|^2 + \|q\|^2} \leq \frac{pq}{\|p\| \|q\|} \leq 1.$$

したがって pq の正負に関係なく

$$(5.15) \quad \gamma_{Bg}^2 \leq \gamma_C^2 \leq 1$$

が得られる。YW 法は偏自己相関の値が推定法に依存しないので、(5.15) は当然成立する。上に述べたように YW 法は $\|p\| = \|q\|$ であるので、(4.17)~(4.19) が成立し、よって (4.19) 式からも (5.15) 式が成り立つことがいえる。

S^{M+1} も p, q を使って表すと、

$$(5.16) \quad S(\gamma) = \frac{\|p - \gamma q\|^2 + \|q - \gamma p\|^2}{2}$$

$$= \frac{W}{2} \left(\gamma - \frac{2pq}{W} \right)^2 + \frac{W}{2} \left(1 - \frac{4pq}{W^2} \right).$$

ただし $S(\gamma) = S^{M+1}(\gamma_{M+1})$, $W = \|p\|^2 + \|q\|^2$ 。この関数 $S(\gamma)$ を最小にする γ はもちろん γ_{Bg} であるが、 $\|p\|, \|q\|$ の大小にかかわらず簡単な計算によって常に

$$(5.17) \quad |\gamma_F - \gamma_{Bg}| \geq |\gamma_C - \gamma_{Bg}|$$

が成立することが解る。等号は先にも述べたように $\|p\| = \|q\|$ のときに成立。したがって

$$(5.18) \quad S(\gamma_{Bg}) \leq S(\gamma_C) \leq S(\gamma_F)$$

がいえる。

6. まとめ

AR モデルを有限データの 1 表現方法として捉え、AR モデルとは結局有限データをいかに表現しようとしているのかを意識して書いたつもりである。とくに、AR モデルで大きな役割をはたす仮定 (3.6) が、パラメーター推定にどのように関係しているのかに注意して、AR モデルに関する諸性質を Vector-Matrix 表現で AR モデルを表現することにより、線形代数の観点から見直してみた。これによりレビンソンの漸化式が、線形空間内のベクトル間の関係として捉え図式化することができるため、非常に簡潔で明瞭になったのではないと思う。また偏自己相関の計算方法も線形代数の見地から見直した。本稿では 1 変数の時系列を取り扱ったが、多変数の自己回帰モデルに対しても本稿のような議論が同様にできる。多変数に拡張する

場合いくつか注意すべき点があるが、割愛させて頂いた。

現実のデータは有限であり、また定常性など仮定できるかどうかは普通、解析者は知る由もない。したがって実際の解析にはデータに対して十分柔軟な近代的なARモデルを用いることが望ましい。本稿の目的は新しい有効な解析手法の提案といった現実的な問題ではなく、すでに確立された観のある古典的ARモデルを線形代数の観点から再解釈を行うことにある。本稿を通じてARモデルに対する理解を深めて頂けたならば幸いである。

謝 辞

諸々の有益なコメントを頂いた統計数理研究所・北川助教授に深く感謝致します。また、本稿の不適切な表現法を指摘し、改稿にあたって非常に参考になるコメントをしてくださった査読者のかたに感謝します。

参 考 文 献

- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). 『ダイナミックシステムの統計的解析と制御』, サイエンス社, 東京.
- Burg, J.P. (1975). Maximum entropy spectral analysis, Ph.D. thesis, p.123, Stanford University, California.
- Burg, J.P. (1981). Maximum entropy spectral analysis, *Modern Spectrum Analysis* (ed. D.D. Childers), IEEE Press, New York.
- Haykin, S. and Kesler, S. (1979). Prediction-error filtering and maximum-entropy spectral estimation, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis* (ed. S. Haykin), 9-72, Springer, New York.
- 藤井光昭 (1974). 『時系列解析』, コロナ社, 東京.
- 日野幹夫 (1977). 『スペクトル解析』, 朝倉書店, 東京.
- 石黒真木夫 (1982). ランダムデータの統計的処理(2), 油圧と空気圧, **13**, 121-125.
- 石黒真木夫 (1989). 多次元ARモデルによるシステム解析, オペレーションズ・リサーチ, **34**, 547-554.
- Kay, S.M. and Marple, S.L., Jr. (1981). Spectrum analysis — A modern perspective, *Proceeding of the IEEE*, **69**, 1380-1419.
- 北川源四郎 (1986a). 時変係数自己回帰モデル, 統計数理, **34**, 273-283.
- 北川源四郎 (1986b). スペクトル解析の動向, 計測と制御, **25**, 1074-1081.
- 北川源四郎 (1989). 非ガウス型時系列モデリング, オペレーションズ・リサーチ, **34**, 541-546.
- Levinson, N. (1947). The Wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction, *J. Math. Phys.*, **25**, 261-278.
- 森下 巖, 小畑秀文 (1982). 『信号処理』, 計測自動制御学会, 東京.
- Nakamura, H. (1989). Statistical identification and optimal control of thermal power plants, reprints of the "Symposium on the Analysis of Statistical Information, Tokyo", 337-362.
- Ohtsu, K. and Kitagawa, G. (1984). Statistical analysis of the AR type ship's autopilot system, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **106**, 193-202.
- 尾崎 統 編 (1989). 『時系列論』, 放送大学教育振興会, 東京.
- 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎 (1983). 『情報量統計学』, 共立出版, 東京.
- 佐和隆光 (1979). 『回帰分析』, 朝倉書店, 東京.
- 添田 喬, 中溝高好, 大松 繁 (1979). 『信号処理の基礎と応用』, 日新出版, 東京.
- 田村(濱田)義保 (1984). 非定常スペクトル解析について, 統計数理研究所彙報, **32**, 45-58.

An Interpretation of Auto-regression (AR) Model
by Using a Linear Algebra

Tomoyuki Higuchi

(The Institute of Statistical Mathematics)

An auto-regressive (AR) model is expressed by using a matrix formulation and revitarized through a linear algebra. The Levinson's recursion, which is an efficient recursive solution for AR model parameters, is discussed within a framework of the linear space. Moreover, several solutions for calculating a partial auto correlation coefficients (PARCOR) are classified according to the minimized prediction error.