統計基礎研究系

多変量尺度混合分布の漸近展開

清 水 良 一

分布 G に従う p 次元確率ベクトル X の尺度混合 $Y=\Sigma^{-1/2}X$ の分布関数 $F(x)$ を $G(x)$ の周りで展開する問題を考える．ただし，Σ は X と独立で，単位行列 I_p の近傍で変動する確率行列であるとする．G の確率密度関数を $g(x)$ とし，簡単の為に k は2またはそれより大きい整数とし，$F(x)$ を

$$G_k(x)=G(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\cdots g(x)$$

という形の関数で近似する：

$$(*)\qquad F(x)=G_k(x)+\Delta_k(x).$$

問題は…の部分の決定と誤差項 $\Delta_k(x)$ の評価である．$\sup|\Delta_k(x)|$ については若干の結果があるが，ここでは（$*$）を微分した $f(x)=g_k(x)+\delta_k(x)$ について

$$\Delta_k\equiv\int_{R^p}|\delta_k(x)|\,dx$$

を評価したい．特別の場合として $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2,\ldots, \sigma_p^2)$ で，G が標準正規分布の直積，あるいはガンマ分布（特に指数分布）の直積のとき，この評価は具体的に可能である．例えば，G が正規分布の場合には

$$g_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j j!}\sum\binom{j}{j_1,\ j_2,\ldots,\ j_p}\prod_{u=1}^{p}H_{2j_u}(x_u)(\sigma_u^2-1)^{j_u}\cdot\phi(x)$$

$$\Delta_k\leqq\frac{1}{2^k k!}\sum\binom{k}{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_p}\prod_{u=1}^{p}\alpha_{k_u}(\sigma_u^2\vee\sigma_u^{-2}-1)^{k_u}$$

である．ただし，H はエルミート多項式，$\alpha_k(k\geqq1)$ は k だけで決まる正の数で，特に $\alpha_1\leqq0.28$, $\alpha_2\leqq0.26$, $\alpha_3\leqq0.25$, $\alpha_4\leqq0.16$ である．また，$k_u=0$ のとき $\alpha_{k_u}=1.26\cdot(\sigma_u^2\vee\sigma_u^{-2})$ と置き換える．

また，G が指数分布の場合は

$$g_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j j!}\sum\binom{j}{j_1,\ j_2,\ldots,\ j_p}\prod_{u=1}^{p}L_{j_u}(x_u)(\sigma_u-1)^{j_u}\cdot g(x)$$

$$\Delta_k\leqq\frac{1}{k!}\sum\binom{k}{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_p}\prod_{u=1}^{p}\beta_{k_u}(\sigma_u\vee\sigma_u^{-1}-1)^{k_u}$$

となる．ただし，L はラゲール多項式，β_k は k だけで決まる正の数で，特に $\beta_1\leqq0.71$, $\beta_2\leqq0.82$, $\beta_3\leqq1.01$, $\beta_4\leqq1.22$, $\beta_5\leqq1.48$, $\beta_6\leqq1.53$ である．$k_u=0$ のとき，$\beta_{k_u}=(\sigma_u\vee\sigma_u^{-1})$ と置き換える．

フィッシャーのナイル河問題について

平 野 勝 臣

R.A. Fisher のナイル河問題の主旨は『ナイル河流域の農地の肥沃度は洪水の際の水位で決定される．洪水後の農地の再配分を，前もってわかっている割合で，水位に依存せずに行うにはどうするか』である（Fisher (1956), p. 118 参照)．

この問題に対する彼の与えた一つの例は以下の通り (Fisher (1956), pp. 163-169 参照)．2次元確率密度関数 $f(x,y)=\exp\{-\theta x-\theta^{-1}y\}$ から n 個の標本をとる．$T=\sqrt{\bar{Y}/\bar{X}}$, $U=\sqrt{\bar{X}\bar{Y}}$ とする．母数 θ の