統計基礎研究系

多変量尺度混合分布の漸近展開

清　水　良　一

分布 G に従う p 次元確率ベクトル X の尺度混合 $Y=\Sigma^{-1/2}X$ の分布関数 $F(x)$ を $G(x)$ の周りで展開する問題を考える．ただし，Σ は X と独立で，単位行列 I_p の近傍で変動する確率行列であるとする．G の確率密度関数を $g(x)$ とし，簡単の為に k は2またはそれより大きい整数とし，$F(x)$ を

$$G_k(x)=G(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\cdots g(x)$$

という形の関数で近似する：

$$(*)\qquad F(x)=G_k(x)+\Delta_k(x).$$

問題は…の部分の決定と誤差項 $\Delta_k(x)$ の評価である．$\sup|\Delta_k(x)|$ については若干の結果があるが，ここでは(＊)を微分した $f(x)=g_k(x)+\delta_k(x)$ について

$$\Delta_k\equiv\int_{R^p}|\delta_k(x)|\,dx$$

を評価したい．特別の場合として $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots,\sigma_p^2)$ で，G が標準正規分布の直積，あるいはガンマ分布（特に指数分布）の直積のとき，この評価は具体的に可能である．例えば，G が正規分布の場合には

$$g_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j j!}\sum\binom{j}{j_1,\ j_2,\ldots,\ j_p}\prod_{u=1}^{p}H_{2j_u}(x_u)(\sigma_u^2-1)^{j_u}\cdot\phi(x)$$

$$\Delta_k\leqq\frac{1}{2^k k!}\sum\binom{k}{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_p}\prod_{u=1}^{p}\alpha_{k_u}(\sigma_u^2\vee\sigma_u^{-2}-1)^{k_u}$$

である．ただし，H はエルミート多項式，$\alpha_k(k\geqq1)$ は k だけで決まる正の数で，特に $\alpha_1\leqq0.28$, $\alpha_2\leqq0.26$, $\alpha_3\leqq0.25$, $\alpha_4\leqq0.16$ である．また，$k_u=0$ のとき $\alpha_{k_u}=1.26\cdot(\sigma_u^2\vee\sigma_u^{-2})$ と置き換える．

また，G が指数分布の場合は

$$g_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j j!}\sum\binom{j}{j_1,\ j_2,\ldots,\ j_p}\prod_{u=1}^{p}L_{j_u}(x_u)(\sigma_u-1)^{j_u}\cdot g(x)$$

$$\Delta_k\leqq\frac{1}{k!}\sum\binom{k}{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_p}\prod_{u=1}^{p}\beta_{k_u}(\sigma_u\vee\sigma_u^{-1}-1)^{k_u}$$

となる．ただし，L はラゲール多項式，β_k は k だけで決まる正の数で，特に $\beta_1\leqq0.71$, $\beta_2\leqq0.82$, $\beta_3\leqq1.01$, $\beta_4\leqq1.22$, $\beta_5\leqq1.48$, $\beta_6\leqq1.53$ である．$k_u=0$ のとき，$\beta_{k_u}=(\sigma_u\vee\sigma_u^{-1})$ と置き換える．

フィッシャーのナイル河問題について

平　野　勝　臣

R.A. Fisher のナイル河問題の主旨は『ナイル河流域の農地の肥沃度は洪水の際の水位で決定される．洪水後の農地の再配分を，前もってわかっている割合で，水位に依存せずに行うにはどうするか』である（Fisher (1956), p. 118 参照）．

この問題に対する彼の与えた一つの例は以下の通り（Fisher (1956), pp. 163-169 参照）．2次元確率密度関数 $f(x,y)=\exp\{-\theta x-\theta^{-1}y\}$ から n 個の標本をとる．$T=\sqrt{\bar{Y}/\bar{X}}$, $U=\sqrt{\bar{X}\,\bar{Y}}$ とする．母数 θ の

十分統計量は (T, U), θ の MLE は T, U は補助統計量である．(x, y) における肥沃度を $f(x, y)$, θ を水位とすると，再配分は U を用いればよい．U が与えられた条件の下で T の条件付分布で θ の推論を行えばよい．

θ の MLE は標本の全情報を持たないが，その回復は補助統計量によって部分的になされるという筋書きで，この一例はナイル河問題のあてはまりが極めてよい．不完備なモデルであるが故に不偏推定量を定める問題 (Sibuya (1977)) の例や補助統計量の役割を示す例として，また母数間に関数関係のある問題の推測の例として等々，多くの統計学の理論の展開に利用されてきた．しかしナイル河問題で何を主張したかったのか．Tan (1973, 1983), Barnard and Sprott (1983) 等は補助統計量をみつけることが問題であると述べている．Iwase and Setô (1986), Joshi and Nabar (1987), Kariya (1989)等は上の一例の θ を推定する問題として扱っている．

標題に関した今年度の研究では，この問題の経緯について調べ，上記モデルを一般化し，その母数の推定についていくつかの知見を得た．

参考文献

Barnard, G.A. and Sprott, D.A. (1983). The generalised problem of the Nile: Robust confidence sets for parametric functions, *Ann. Statist.*, **11**, 104-113.

Fisher, R.A. (1956). *Statistical Methods and Scientific Inference*, Oliver and Boyd, Edinburgh. (1959年の 2nd ed. の訳書，『統計的方法と科学的推論』，渋谷・竹内訳，岩波書店).

Iwase, K. and Setô, N. (1986). Incomplete sufficient unbiased estimators in the problem of the Nile, *Comm. Statist. Theory Methods*, **15**, 279-289.

Joshi, S. and Nabar, S. (1987). Estimation of the parameter in the problem of the Nile, *Comm. Statist. Theory Methods*, **16**, 3149-3156.

Kariya, T. (1989). Equivariant estimation in a model with an ancillary statistic, *Ann. Statist.*, **17**, 920-928.

Sibuya, M. (1977). 不完備十分・不偏推定量，シンポジウム「不偏推定量の現段階」のレジュメ．

Tan, P. (1973). On Fisher's problem of the Nile in uncertain inference, *Comm. Statist. Theory Methods*, **2**, 45-58.

Tan, P. (1983). Fisher's problem of the Nile, *Encyclopedia of Statistical Sciences* (eds. S. Kotz and N.L. Johnson), Vol. 3, 128-130, Wiley, New York.

ブートストラップ信頼区間の構成

小　西　貞　則

観測されたデータに基づいて，母集団の特性を数値的に探る一つの統計的手法がブートストラップ法である．この手法の特徴は，極めて緩やかな仮定のもとでより複雑な問題を取り扱える点にある．ここでは，ブートストラップ法に基づいて信頼区間を構成する問題を，ノンパラメトリックなモデルのもとで理論的に検討し，手法の持ついくつかの性質および特徴を明らかにした．

いま未知の確率分布 F からの n 個の無作為標本に基づく推定量 $\hat{\theta}$ を用いて，パラメータ θ を推定する．ここで，経験分布関数 $\hat{F}$ に対して，$\theta=T(F)$ および $\hat{\theta}=T(\hat{F})$ となる汎関数 T が存在するものと仮定する．いま θ^* を $\hat{F}$ からのブートストラップ標本に基づく推定量とし，その分布関数を $\hat{G}(x)=P(\hat{\theta}^*<x)$ と置く．$\hat{G}(x)$ の分布を理論的に導くことができる場合はまれで，これを数値的に近似するための計算法がブートストラップ法といえる．最も基本的な形の信頼係数 $1-2\alpha$ の信頼区間は $[\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$ で与えられる．

ブートストラップ法の理論的研究が進み，より精度の高い信頼区間を構成するには，推定量の分布の偏りと歪の補正が必要であることが指摘された．これに答えて Efron (1987)は，これらの修正を施したいわゆる BC_a 法と呼ばれるブートストラップ信頼区間を提唱した．実際，提唱された方法は，