

不連続抵抗係数をもつブラウン運動の 特性汎関数による解析

統計数理研究所 岡 崎 卓

(1990 年 2 月 受付)

1. はじめに

液体中に浮遊する花粉粒子が不規則な揺動を示す現象は先駆的研究者の名を冠してブラウン運動と呼ばれている。花粉粒子の巨視的な運動と液体分子の微視的な作用が共に関与するこの現象は確率過程の典型例を与える点と、巨視的現象を通して微視的な世界の情報を探る手がかりをもたらず点で、数学的にも物理学的にも重要な研究対象である。しかも、このブラウン運動は花粉の泳動にとどまらず通信機における出力の乱変動や波浪を受ける船体の振動など物理、工学上の広汎な分野にしばしば現われる基礎的な現象であり、実用上も理論上も興味と重要性とを併せ備えている。

ブラウン運動の最も基本的な問題は、対象粒子の運動の確率的記述をもとに、その統計量、例えば平均速度や速度の相関関数などを流体が粒子に及ぼす抵抗力と揺動力の強さに関するパラメーターによって表現することである。花粉粒子に関する通常のブラウン運動では、抵抗力が粒子の速度に比例するから、粒子の運動方程式は極めて簡単な確率微分方程式——Langevin 方程式——であって、その解の統計的性質が詳しく調べられており、確率密度関数や相関関数の解析的表現も得られている。この場合は確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式が連続関数を係数とする偏微分方程式となり、その解を容易に見出せるという事情に基づく。より複雑なブラウン運動、例えば粒子の受ける抵抗が速度の非線形連続関数となる場合や不規則外力が正規白色過程から外れ、自己相関を伴う非正規過程となる場合については、現在精力的に研究が行われており、分散や相関関数を精密に表現する方法 (Bixon and Zwanzig (1971), Kitahara et al. (1979), Valsakumar (1985)) が開発されている。

しかし、抵抗力を表す関数が速度の不連続関数である場合は、簡明適切な解析法が未だ報告されていない。例えばブラウン粒子に作用する抵抗 R がその速度 u の正負によって異なり、

$$R = \begin{cases} au & u > 0 \\ bu & u \leq 0 \end{cases} \quad (b \neq a)$$

なる形をとる場合、速度 u の平均と分散は抵抗係数 a, b の関数として容易に求まるものの、相関関数については具体的表現が得られていないのである。

通常、相関関数など多時刻統計量の算出には、遷移確率による方法、またはモーメント法が用いられる。遷移確率の方法では Langevin 方程式に対応する Fokker-Planck 方程式の非定常解として遷移確率を求め、これを積分して例えば相関関数を計算する。しかしこの Fokker-Planck 方程式中に不連続関数が係数として含まれるときは独立変数の正負各領域で適合条件を考慮しつつ固有関数を求め、さらにその重畳を図るという煩雑な操作を必要とするので、本

問題には適用困難である。制御理論においては Bang-Bang servo の動作特性に関し $R=c \operatorname{sgn} u$ ($u \neq 0$), $R=0$ ($u=0$) なる場合を考察して相関関数の固有関数展開を与えた例 (Wishner (1960), Soong (1973)) があるが, 抵抗 R でなく抵抗係数 $\frac{dR}{du}$ の不連続性は取り上げられていない (区間的に線形なフィルターによる正規過程の変換も調べられている (Stratonovich (1963)) が, このフィルターは微分過程ではなく単なる代数関数である)。一方, モーメント法は求める統計量を支配する方程式を Langevin 方程式から導き, これを解く方法である。しかし Langevin 方程式が非線形の場合はその方程式に別種の統計量が出現し, この新たな統計量を定めるためにまた別の統計量を必要とするから, 閉じた方程式系を見出し得ないという欠点を持つ。

このように, ブラウン運動に関する多時刻統計量の正確な表式を得ることは, 抵抗係数に不連続性がある場合, 従来の Fokker-Planck 方程式を介する方法やモーメント法では困難である。そこで一般には不連続関数を連続関数で近似する等価線形法 (Budgor et al. (1976)) に訴えているのが実状であるが, 結果の精度に関して明確な評価ができない。本論の目的は特性汎関数を導入して多時刻統計量を系統的に処理し得る新たな定式化を行い, 具体的に相関関数を求めることにある。

いわゆる特性関数はある特定の時刻における確率密度関数の Fourier 変換に過ぎないが, 特性汎関数は時間軸全体を一括して取り扱うもので, 多時刻統計量の母関数である。従って, 無限個の方程式を取り扱わねばならぬモーメント法と異なり, 特性汎関数による方法では一個の汎関数方程式を扱えばよい。乱流理論では既に特性汎関数が導入されている (Monin and Yaglom (1967)) が, 確率微分方程式論においては未だ特性汎関数による定式化を見ない。それは, Fokker-Planck 方程式と遷移確率によって原理的には全ての問題を扱い得るので, 汎関数微分方程式の取扱いを要求する特性汎関数の利用に至らなかったためと思われる。

特性汎関数を支配する汎関数微分方程式を書き下すとき, 不完全特性汎関数と本論で名付ける新たな汎関数が現われる。不完全特性汎関数の出現は抵抗係数の不連続性を反映しており, これを特性汎関数に結び付ける擬射影子の導入は本解析法の大きな特徴をなす。次の第2章では Fokker-Planck 方程式とその解によって定常時の平均と分散を求め, 第3章では, 擬射影子の表現と特性汎関数の方程式を導く。続く第4章においては相関関数を求める過程を述べる。擬射影子の存在のため特性汎関数方程式の厳密解は見出し難いので, 特性汎関数のモデル表現に基づき相関関数の近似表式を求める。その近似の精度を物理的な仮定によって評価すると共に, 等価線形法およびシミュレーションの結果と比較する。特性汎関数や汎関数微分の定義に現われる諸関数については, それらの定義および関連公式が満足される程度に充分良い性質を具備しているものとして, 物理的な解釈を交えつつ論を進める。

2. Langevin 方程式と1時刻統計量

2.1 不連続抵抗係数を持つブラウン粒子の Langevin 方程式

本論で考慮するのは非線形確率微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u + \beta \frac{u + |u|}{2} = n(t)$$

に従う確率過程 $u(t)$ ($0 \leq t < \infty$) の統計的性質である。ここに t は時間, α, β は実数 ($\alpha > 0$, $\beta \geq 0$), $n(t)$ は分散 σ^2 を持つ正規白色過程 (Gaussian white process) とする;

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= 0 \\ \langle n(t)n(s) \rangle &= \sigma^2 \delta(t-s) \end{aligned}$$

但し、 $\langle \dots \rangle$ は期待値を、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数を表す。階段関数

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

を用いれば上記方程式は次の形をとる;

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha + \beta Y[u(t)])u = n(t).$$

この方程式は変数 u をブラウン粒子の速度、 $n(t)$ を周囲の媒質から受ける揺動力とみなせば、初期値 $u|_{t=0}$ と揺動力 $n(t)$, $t \geq 0$ が与えられたときブラウン粒子の運動 $u(t)$, $t > 0$ を記述する Langevin 方程式に他ならない。このとき $R = (\alpha + \beta Y[u(t)])u$ は、速度 u で動く粒子に作用する抵抗であり、従って抵抗係数は $\frac{dR}{du} = \alpha + \beta$ ($u > 0$), $\frac{dR}{du} = \alpha$ ($u \leq 0$) の如く $u = 0$ で不連続に変化する。この方程式は抵抗係数に異方性を有するブラウン運動の極めて簡単な一例を与えているわけである。

Langevin 方程式 (2.2) に従って変動する変数 $u(t)$ は時間 t をパラメータとする確率変数であり、物理的数学的興味の主たる部分は先ず t を固定したときの $u(t)$ の平均および分散、さらに確率分布であり、次いで 2 時刻 t, s における相関関数である。前者即ち 1 時刻統計量について本章 2, 3 節で触れ、相関関数など多時刻統計量の取扱いについては後の章に述べる。

2.2 確率密度, 平均および分散

時刻 t における速度 u の確率密度関数

$$f(v, t) dv = \Pr\{v \leq u(t) < v + dv\}$$

は揺動力 $n(t)$ の正規白色性により、いわゆる Fokker-Planck 方程式

$$(2.3) \quad \frac{\partial f(u, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial u} (\alpha + \beta Y[u])u + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \right] f(u, t)$$

を満たし (混同の恐れのない限り、 f の引数にも u を用いる), その定常解は無遠消失 $f = 0$ ($u \rightarrow \infty$) の境界条件のもとでは

$$(2.4) \quad f = f_0 e^{-u^2/2\sigma_a^2 - Y(u)u^2/2\sigma_b^2}$$

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ \sigma_a \\ \sigma_b \\ \sigma_{(\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_a + \sigma_b} \\ (\sigma^2/2\alpha)^{1/2} \\ (\sigma^2/2(\alpha + \beta))^{1/2} \\ (\sigma^2/2\beta)^{1/2} \end{pmatrix}$$

となる。この密度は 2 種の正規分布の $u \leq 0$ の側と $u > 0$ の側を $u = 0$ で繋いだ形をしており、その平均、絶対値の平均、および分散は次のように計算される;

$$(2.6) \quad \begin{cases} \langle u \rangle = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sigma_a - \sigma_b) & (\leq 0) \\ \langle |u| \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{\sigma_a + \sigma_b} \\ \langle u^2 \rangle = \frac{\sigma_a^3 + \sigma_b^3}{\sigma_a + \sigma_b} \end{cases}$$

2.3 特性関数と不完全特性関数

特性関数は確率密度関数 $f(u, t)$ の Fourier 変換であるから f と同様の情報を持つと共に、モーメント群の母関数の役を果たす。これを Ψ と記せば

$$(2.7) \quad \Psi = \Psi(\phi, t) = \langle e^{i\phi u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi u} f(u, t) du$$

である。ここに ϕ は実数をとる試験パラメーター、 i は虚数単位である； $i^2 = -1$ 。速度の m 次モーメントは試験関数 ϕ による微分で与えられる；

$$\langle u^m \rangle = \left(\frac{\partial}{i\partial\phi} \right)^m \Psi \Big|_{\phi=0}, \quad m=0, 1, \dots$$

定常状態では式 (2.4) の確率密度 f によって (2.7) の積分を実行し

$$(2.8) \quad \Psi(\phi, t) = \frac{2}{\sigma_a + \sigma_b} \left[\sigma_a \left(\frac{1}{2} - N(\sigma_a i\phi) \right) e^{(\sigma_a i\phi)^2/2} + \sigma_b \left(\frac{1}{2} + N(\sigma_b i\phi) \right) e^{(\sigma_b i\phi)^2/2} \right]$$

を得る。ここに

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2/2} d\xi$$

は誤差関数である。

次に不完全特性関数と名付ける新たな関数を導入する；

$$(2.9) \quad \widehat{\Psi}(\phi, t) = \langle Y(u) e^{i\phi u} \rangle = \int_0^{\infty} e^{i\phi u} f(u, t) du.$$

不完全特性関数 $\widehat{\Psi}$ は $\langle Y(u) u^m \rangle$ の母関数であり、従って絶対値モーメントは次のように表される；

$$\langle |u^m| \rangle = 2 \left(\frac{\partial}{i\partial\phi} \right)^m \widehat{\Psi} \Big|_{\phi=0} - \left(\frac{\partial}{i\partial\phi} \right)^m \Psi \Big|_{\phi=0}, \quad m=1, 3, \dots$$

Fourier 逆変換によって f を Ψ で表し、積分公式

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} e^{-i\phi u} du = \frac{1}{i\phi} + \pi\delta(\phi)$$

を用いれば $\widehat{\Psi}$ と Ψ を結ぶ関係式を得る；

$$(2.11) \quad \widehat{\Psi}(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i (\phi - \phi')} + \frac{1}{2} \delta(\phi - \phi') \right] \Psi(\phi', t) d\phi'.$$

定常状態では、 Ψ の表現 (2.8) と上式 (または f の表現 (2.4) と (2.9)) により

$$\bar{\Psi} = \frac{2\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \left(\frac{1}{2} + N(\sigma_b i\psi) \right) e^{(\sigma_b i\psi)^2/2}$$

と表すことができる。

以上は確率密度関数 f を既知として Ψ および $\bar{\Psi}$ を求めたのであったが、 f に依らずにこれらを求める手段が存する。正規過程 $n(\cdot)$ の集合とインデックス ω の集合を対応させ、その集合上の確率分布を $\rho(\omega)$ とし、 $n(\cdot) = n(\cdot, \omega)$ のもとに生ずる過程を $u(\cdot, \omega)$ と記せば

$$\Psi(\phi, t) = \int_{(\omega)} e^{i\phi u(t, \omega)} d\rho(\omega)$$

と書かれ、従って Langevin 方程式より

$$\begin{aligned} (2.12) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= i\phi \int \frac{\partial u(t, \omega)}{\partial t} e^{i\phi u(t, \omega)} d\rho(\omega) \\ &= i\phi \int [-\alpha u(t, \omega) - \beta Y[u(t, \omega)]u(t, \omega) + n(t, \omega)] e^{i\phi u(t, \omega)} d\rho(\omega) \\ &= i\phi \left(-\alpha \frac{\partial}{i\partial\phi} \Psi - \beta \frac{\partial}{i\partial\phi} \bar{\Psi} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (i\phi)^2 \Psi \end{aligned}$$

を得る。ここで正規過程 $n(\cdot)$ の汎関数 $K(n(\cdot))$ に関する Novikov の公式 (Novikov (1964), Monin and Yaglom (1967))

$$(2.13) \quad \langle n(t)K(n(\cdot)) \rangle = \int_0^\infty \langle n(t)n(s) \rangle \left\langle \frac{\delta K}{\delta n(s)} \right\rangle ds$$

および $n(\cdot)$ の白色性、さらに Langevin 方程式に基づく $\frac{\delta u(t)}{\delta n(t)} = \frac{1}{2}$ を用いた、不完全特性関数 $\bar{\Psi}$ の時間微分に関しても同様に

$$\begin{aligned} (2.14) \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} &= i\phi \int [-(\alpha + \beta)u(t, \omega) + n(t, \omega)] Y[u(t, \omega)] e^{i\phi u(t, \omega)} d\rho(\omega) \\ &= i\phi \left[-(\alpha + \beta) \frac{\partial}{i\partial\phi} \bar{\Psi} \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 (i\phi)^2 \bar{\Psi} + \frac{1}{2} \sigma^2 i\phi P_0 \end{aligned}$$

となる。ここに右辺第3項は $\frac{d}{dx} Y(x) = \delta(x)$ に由来し、 P_0 は Ψ の積分で与えられる；

$$P_0 = \langle \delta(u) e^{i\phi u} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\phi, t) d\phi.$$

自明の境界条件

$$(2.15) \quad \Psi(\phi, t)|_{\phi=0} = 1$$

を補えば、方程式系 (2.12), (2.14) は確率密度関数 f に対する Fokker-Planck 方程式と同等の内容を持つ。

3. 特性汎関数と不完全特性汎関数

3.1 多時刻統計量の取扱い

前章に述べたのは確率過程 u の或る 1 時刻に関する統計量であった。本章では多時刻に亘る

統計量を取り扱う。多時刻統計量として最も基本的な2時刻 t, s 間の相関関数

$$(3.1) \quad h(t, s) = \langle u(t)u(s) \rangle - \langle u(t) \rangle \langle u(s) \rangle$$

を例に採ると、これを求める通常の方法は遷移確率密度

$$(3.2) \quad w(vt | v_0s) = \Pr\{v \leq u(t) < v + dv | u(s) = v_0\}$$

による表式

$$\langle u(t)u(s) \rangle = \int v v_0 w(vt | v_0s) dv f(v_0, s) dv_0$$

を用いるものである。遷移確率密度 w は初期条件 $w(vt | v_0s) = \delta(v - v_0)$ のもとに Fokker-Planck 方程式の非定常解として定まるから、同方程式の固有関数系を見出し、初期条件と境界条件を満たすよう重ね合わせによって解を構成することが一般に行われる。しかし第1章で触れたように今の場合抵抗係数の不連続性により Fokker-Planck 方程式(2.3)が独立変数の正負各領域で異なる形を持つので、非定常解を見出す作業は煩瑣をきわめる。

また、モーメント法 (Soong (1973)) の多時刻化として、相関関数が満たす方程式

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle u(t)u(s) \rangle + \alpha \langle u(t)u(s) \rangle + \beta Y[u(t)]u(t)u(s) = \langle n(t)u(s) \rangle$$

の利用が考えられる。しかし左辺第3項に見るように新たな未知量を含み、この量についての方程式を作ればさらに新たな未知統計量を含む。かくして閉じることのない方程式の連鎖が生ずる。これは非線形の確率微分方程式や乱流の方程式に共通の事情であり、方程式系を閉鎖する種々の方法がそれぞれの分野で提案されているが、不連続関数の存在に伴う困難の処理には不適と考えられる。そこで、特性汎関数および不完全特性汎関数を導入して、多時刻統計量を系統的に処理する方法を以下に述べる。

3.2 特性汎関数と不完全特性汎関数

本節では $u(t)$ を $0 \leq t < \infty$ 上に定義された一般の確率過程とし、過程 $u(\cdot)$ に関する特性汎関数を次のように与える;

$$(3.4) \quad \Phi = \Phi(\varphi(\cdot)) \equiv \langle e^{i\varphi \cdot u} \rangle.$$

ここに $\varphi(t)$ ($0 \leq t$) は実数値をとる試験関数で、 $\varphi \cdot u$ は内積

$$\varphi \cdot u = \int_0^\infty \varphi(s)u(s)ds$$

を、 $\langle \dots \rangle$ は過程 $u(\cdot)$ の集合上の確率密度汎関数

$$F(v(\cdot)) \delta v(\cdot) = \Pr\{v(t) \leq u(t) < v(t) + \delta v(t), t \geq 0\}$$

による期待値

$$\langle \dots \rangle = \int_{(u)} \dots F(u(\cdot)) \delta u(\cdot)$$

を意味する。特性汎関数 Φ は第2章の特性関数 Ψ の一般化にあたり、試験関数 φ による汎関数微分を

$$D_t = \frac{\delta}{i\delta\varphi(t)}$$

と記せば

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Phi|_{\varphi=0} = 1 \\ D_t\Phi|_{\varphi=0} = \langle u(t) \rangle \\ D_t D_s \Phi|_{\varphi=0} = \langle u(t)u(s) \rangle \\ D_{t_1} D_{t_2} \cdots D_{t_n} \Phi|_{\varphi=0} = \langle u(t_1)u(t_2)\cdots u(t_n) \rangle \end{cases}$$

が成立する。即ち Φ は多時刻モーメントの母関数の役を担う。

次に不完全特性関数 $\tilde{\Psi}$ の多時刻化として不完全特性汎関数 $\tilde{\Phi}_t$ を定義する；

$$(3.6) \quad \tilde{\Phi}_t = \tilde{\Phi}_t(\varphi(\cdot)) \equiv \langle Y[u(t)] e^{i\varphi \cdot u} \rangle.$$

この $\tilde{\Phi}_t$ は時刻 t に依存する $\varphi(\cdot)$ の汎関数であって、不完全モーメントの母関数である；

$$(3.7) \quad \begin{aligned} D_t \tilde{\Phi}_t|_{\varphi=0} &= \langle Y[u(t)] u(t) \rangle \\ D_t D_s \tilde{\Phi}_t|_{\varphi=0} &= \langle Y[u(t)] u(t) u(s) \rangle. \end{aligned}$$

明らかに Φ は過程 $u(\cdot)$ の統計に関し確率密度汎関数 F と同等の情報を有するが、 $\tilde{\Phi}_t$ は部分的情報を持つに過ぎない。 Φ と $\tilde{\Phi}_t$ の関係を明らかにするために次の定義と定理を掲げる。

定義. 試験関数 φ の汎関数 $Z = Z(\varphi(\cdot))$ に作用し時刻 t に依存する積分演算子 \mathbf{p} を次のように定める。

$$(3.8) \quad \mathbf{p}(t)Z = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i(\phi - \varphi(t))} + \frac{1}{2} \delta(\phi - \varphi(t)) \right] d\phi Z(\varphi^t(\cdot))$$

但し $\varphi^t(\cdot) = \varphi(\cdot) + (\phi - \varphi(t))\delta(\cdot - t)$ である。

定義. 汎関数 $A = A(u(\cdot))$ および時刻 t に依存する汎関数 $B = B(t; u(\cdot))$ から構成される φ の汎関数 $H = H(\varphi)$ が

$$H = \langle A(u) e^{i \int_0^{\infty} \varphi(\tau) B(\tau; u) d\tau} \rangle$$

の形を持つとき、“特性汎関数類に属する”という。

定理. 特性汎関数類に属する汎関数 H に対し次式が成り立つ。

$$(3.9) \quad \mathbf{p}(t)H = \langle Y[B(t; u)] A(u) e^{i \int_0^{\infty} \varphi(\tau) B(\tau; u) d\tau} \rangle$$

証. 演算子 \mathbf{p} の定義と公式 (2.10) とにより

$$\mathbf{p}(t)H = \langle \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i(\phi - \varphi(t))v} dv \right] A(u) e^{i \int_0^{\infty} \varphi^t(s) B(s; u) ds} d\phi \rangle$$

となるが、ここで

$$\begin{aligned}
 & -i(\phi - \varphi(t))v + i \int_0^\infty \varphi^t(s)B(s; u)ds \\
 & = i\phi(B(t; u) - v) + i\varphi(t)v + C \quad \left(C = \int_0^\infty (i\varphi(s) - i\varphi(t)\delta(t-s))B(s; u)ds \right)
 \end{aligned}$$

と置けば

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t)H & = \langle \int_0^\infty \delta(B(t; u) - v)A(u)e^{i\varphi(t)v + C}dv \rangle \\
 & = \langle Y[B(t; u)]A(u)e^{i\varphi(t)B(t; u) + C} \rangle \\
 & = \langle Y[B(t; u)]A(u)e^{i \int_0^\infty \varphi(\tau)B(\tau; u)d\tau} \rangle \qquad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

特性汎関数類の H に対しては $Y(B)Y(B) = Y(B)$ ゆえ

$$(3.10) \quad \mathbf{p}(t)\mathbf{p}(t)H = \mathbf{p}(t)H$$

である。この意味により以下 \mathbf{p} を擬射影子と呼ぶ。異なる時刻に対する擬射影子 $\mathbf{p}(t)$ は互いに可換であり、また微分演算子 D と可換である、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t)\mathbf{p}(s)H & = \mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t)H = \langle Y[B(t; u)]Y[B(s; u)]e^{i \int_0^\infty \varphi(\tau)B(\tau; u)d\tau} \rangle \\
 \mathbf{p}(t)D_s H & = D_s \mathbf{p}(t)H = \langle Y[B(t; u)]B(s; u)e^{i \int_0^\infty \varphi(\tau)B(\tau; u)d\tau} \rangle.
 \end{aligned}$$

また、実数 $\xi \geq 1$ をパラメーターとする汎関数

$$H_\xi(\varphi) = \langle e^{i \int \varphi(s)(u(s) - \xi|u(s)|)ds} \rangle$$

は \mathbf{p} に直交する;

$$(3.11) \quad \mathbf{p}(t)H_\xi = \langle Y[u(t) - \xi |u(t)|]e^{i \int \varphi(s)(u(s) - \xi|u(s)|)ds} \rangle = 0.$$

さて、特性汎関数は明らかに特性汎関数類に属するから $(A(u) = 1, B(t; u) = u(t))$

$$(3.12) \quad \mathbf{p}(t)\Phi = \langle Y[u(t)]e^{i\varphi \cdot u} \rangle = \hat{\Phi}_t$$

である。即ち特性汎関数に \mathbf{p} を作用させれば不完全特性汎関数が得られる。この関係は1時刻の特性関数と不完全特性関数の関係(2.11)に対応しており、 \mathbf{p} は特性汎関数からその部分情報を抽出する役を果している。絶対値を含む各種の汎関数もこの両者で表現でき、例えば次のような関係が成り立つ;

$$(3.13) \quad \langle |u(t)| e^{i\varphi \cdot u} \rangle = (2\mathbf{p}(t) - 1)D_t \Phi.$$

過程 $u(\cdot)$ が平均 $\langle u \rangle = 0$ の定常な正規過程であれば、特性汎関数と不完全特性汎関数を具体的に表現できる。即ち相関関数を $h(t, s)$ とすると

$$(3.14) \quad \Phi_{\text{normal}} = e^{\frac{1}{2} \iint h(t, s) i\varphi(t) i\varphi(s) dt ds}$$

であり、(3.8)の積分を実行して(Appendix A 参照)

$$(3.15) \quad \hat{\Phi}_{\text{normal}} = \left(\frac{1}{2} + N \left(\int_0^\infty k(t, s) i\varphi(s) ds \right) \right) \Phi_{\text{normal}}$$

が得られる。ここに

$$(3.16) \quad k(t, s) = h(t, s) / \sqrt{h(t, t)}$$

である。

3.3 特性汎関数の方程式

Langevin 方程式 (2.2) に $e^{i\varphi \cdot u}$ を乗じて期待値をとれば、特性汎関数 Φ の時間的振舞いを律する関係式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) D_t \Phi + \beta D_t \hat{\Phi}_t = \sigma^2 \int_0^\infty i\varphi(s) G(s, t) ds$$

が得られる。右辺は $\langle n(t) e^{i\varphi \cdot u} \rangle$ を Novikov の式 (2.13) によって変形したものであり、

$$(3.17) \quad G(t, s) = G(t, s; \varphi(\cdot)) = \left\langle \frac{\delta u(t)}{\delta n(s)} e^{i\varphi \cdot u} \right\rangle$$

は時刻 s に作用した外力 $n(s)$ が時刻 t の u に及ぼす影響を表すいわゆる単位応答関数に対応するので、以下応答汎関数と呼ぶ。再び Langevin 方程式により、 $a_{ts} = \frac{\delta u(t)}{\delta n(s)}$ は $\frac{\partial}{\partial t} a_{ts} + (\alpha + \beta Y[u(t)]) a_{ts} = \delta(t-s)$ を満たすから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) G(t, s) + \beta \hat{G}(t, s) = \delta(t-s) \Phi$$

となる。ここに

$$(3.18) \quad \hat{G}(t, s) \equiv \langle Y[u(t)] \frac{\delta u(t)}{\delta n(s)} e^{i\varphi \cdot u} \rangle = \mathbf{p}(t) G(t, s)$$

である。以上をまとめれば特性汎関数と応答汎関数を支配する“ $\Phi \cdot G$ 方程式”が得られる；

$$(3.19) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta \mathbf{p}(t)\right) D_t \Phi = \sigma^2 \int_0^\infty i\varphi(s) G(s, t) ds$$

$$(3.20) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta \mathbf{p}(t)\right) G(t, s) = \delta(t-s) \Phi.$$

この方程式に付すべき境界条件は

$$(3.21) \quad \begin{cases} \Phi(\varphi) = 1 & (\varphi(\cdot) = 0) \\ \Phi(\varphi) = \Psi(\psi, t) & (\varphi(\cdot) = \psi \delta(\cdot - t)) \\ G(t, s) = 0 & (t < s) \\ G(t, s) = \frac{1}{2} \Phi & (t = s) \\ G(t, s) = 0 & (t - s \rightarrow \infty) \end{cases}$$

である。第2式は Φ と1時刻特性関数 Ψ との適合条件である。第3式は因果律を表し、第4式は $\frac{\delta u(t)}{\delta n(t)} = \frac{1}{2}$ に由来する。第5式は無限の過去に加えられた外力が現在に影響を及ぼさぬという物理的要請に基づく。

モーメント法によれば相関関数を求めるには $\langle Y[u(t)] u(t) u(s) \rangle$ を初めとする無限箇の多

時刻モーメントの方程式を書き出し、それを全て同時に解く必要があるのに対し、特性汎関数 Φ を利用すれば $\Phi \cdot G$ 方程式 (3.19), (3.20) のみを解いて Φ を求めれば足りることが判る。

尚ここで (3.19) に現われる $\mathbf{p}(t)D_t\Phi = \langle Y[u(t)]u(t)e^{i\varphi \cdot u} \rangle$ が満たす方程式を記しておく。Langevin 方程式 (2.2) によって $\frac{\partial u}{\partial t}$ を $u(t)$ と $n(t)$ で表し、 $\langle Y[u(t)]n(t)e^{i\varphi \cdot u} \rangle$ に Novikov の公式 (2.13) を適用すれば

$$(3.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}(t)D_t\Phi = -(\alpha + \beta)\mathbf{p}(t)D_t\Phi + \frac{\sigma^2}{2} \langle \delta[u(t)]e^{i\varphi \cdot u} \rangle + \sigma^2 \int_0^\infty i\varphi(s)\mathbf{p}(t)G(s, t)ds$$

を得る。上式右辺第2項は

$$(3.23) \quad \langle \delta[u(t)]e^{i\varphi \cdot u} \rangle = \langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\phi e^{i\phi u(t)} e^{i\varphi \cdot u} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\phi \Phi(\varphi(\cdot) + \phi\delta(\cdot - t))$$

により、特性汎関数 Φ を与えれば計算できる。

4. 特性汎関数と相関関数の表現

4.1 特性汎関数の表現

特性汎関数 Φ を φ の関数として具体的に表現できれば多時刻モーメントをはじめ確率過程 $u(\cdot)$ に関するほとんどの性質が明らかになる。しかし汎関数微分方程式の一般的解法が確立していないので前節に導いた $\Phi \cdot G$ 方程式を解き Φ を完全に定めることは困難である。最も基本的な解法は Φ を φ のべきで展開し、その係数(一般に時間の関数)を同方程式から決めることであるが、擬射影子 \mathbf{p} の存在により低次の係数と高次の係数が相互に絡み合うため、単純なべき級数展開では係数を定める閉じた方程式が得られない。そこで本論では、 $\mathbf{p}(t)\Phi$, $D_t\mathbf{p}(t)\Phi$ の低べき項が正しく表現されるよう Φ に特殊のモデル表現を与え、最も基本的な多時刻統計量である相関関数の近似表現を $\Phi \cdot G$ 方程式から求めることとする。

先ず $\Phi \cdot G$ 方程式の構造に留意し、任意の $t \geq 0$ について $\mathbf{p}(t)$ に直交する汎関数 $\Phi_A(\varphi)$ と狭い意味で $\mathbf{p}(t)$ の作用に不変な汎関数 $\Phi_B(\varphi)$ の和として Φ を表す;

$$(4.1) \quad \Phi = a\Phi_A + b\Phi_B$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \mathbf{p}(t)\Phi_A = 0 \\ \mathbf{p}(t)\Phi_B = \Phi_B + O(\varphi) \\ D_t\mathbf{p}(t)\Phi_B = D_t\Phi_B + O(\varphi^2). \end{cases}$$

ここに a, b は後に定める定数である。このような Φ_A, Φ_B の一つの表式を得るため汎関数

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Phi_{A_0} &= e^{\frac{1}{2} \iint h_A(t, s) i\varphi(t) i\varphi(s) dt ds} \\ \Phi_{B_0} &= e^{\frac{1}{2} \iint h_B(t, s) i\varphi(t) i\varphi(s) dt ds} \end{aligned}$$

を導入する。 Φ_{A_0}, Φ_{B_0} はそれぞれ相関関数 $h_A(t, s), h_B(t, s)$ を持ち平均零の正規過程の特性汎関数に他ならない(式 (3.14) 参照)。これらの過程の確率分布による期待値を $\langle \rangle_A, \langle \rangle_B$ と表記し、実数列 $\{\gamma_n, \xi_n, \delta_n, \eta_n\}$ ($\xi_n \geq 1, \eta_n \geq 1, n = 1, 2, \dots$) によって

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Phi_A &= \sum_n \gamma_n \langle e^{i \int \varphi(s)(u(s) - \xi_n |u(s)|) ds} \rangle_A \\ \Phi_B &= \Phi_{B_0} - \sum_n \delta_n \langle e^{i \int \varphi(s)(u(s) - \eta_n |u(s)|) ds} \rangle_B \end{aligned}$$

と置けば, (3.11) により和の各項は \mathbf{p} に直交するから

$$(4.5) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{p}(t)\Phi_A &= 0 \\ \mathbf{p}(t)\Phi_B &= \mathbf{p}(t)\Phi_{B_0} \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

が成立している. 要請 (4.2) を考慮し $\Delta_t = \Phi_B - \mathbf{p}(t)\Phi_B$ の φ 依存性を調べると

$$\begin{aligned} \Delta_t |_{\varphi=0} &= \frac{1}{2} - \sum \delta_n \\ D_t \Delta_t |_{\varphi=0} &= \left(\frac{1}{2} - \sum \delta_n \eta_n \right) \langle |u(t)| \rangle_B \\ D_s D_t \Delta_t |_{\varphi=0} &= - \left(\frac{1}{2} - \sum \delta_n \eta_n \right) \langle u(t)u(s) \rangle_B + \sum \delta_n \eta_n^2 \langle |u(t)u(s)| \rangle_B \end{aligned}$$

となっているから

$$(4.6) \quad \sum \delta_n = 1, \quad \sum \delta_n \eta_n = \frac{1}{2}, \quad \sum \delta_n \eta_n^2 = 0$$

を課すと, Φ_B に対する要請は満たされ,

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \Phi_B &= \frac{1}{2} \langle e^{i\varphi \cdot u} \rangle_B + \frac{1}{2} \int_0^\infty i\varphi(s) \langle |u(s)| e^{i\varphi \cdot u} \rangle_B ds + O(\varphi^3) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_B(s, s) i\varphi(s) ds + O(\varphi^3) \right] \Phi_{B_0} \\ &\quad (k_B(t, s) = h_B(t, s) / \sqrt{h_B(t, t)}) \end{aligned}$$

の形となる. ここで式 (3.12)~(3.15) を用いてある. 因みに

$$\mathbf{p}(t)\Phi_B = \mathbf{p}(t)\Phi_{B_0} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_B(t, s) i\varphi(s) ds + O(\varphi^3) \right] \Phi_{B_0}$$

により Φ_B は (4.2) を確かに満足することが判る. Φ_A についても制約条件

$$(4.8) \quad \sum \gamma_n = 1, \quad \sum \gamma_n \xi_n = \frac{1}{2}, \quad \sum \gamma_n \xi_n^2 = 0$$

を課せば次の表現を得る;

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Phi_A &= \frac{1}{2} \langle e^{i\varphi \cdot u} \rangle_A - \frac{1}{2} \int_0^\infty i\varphi(s) \langle |u(s)| e^{i\varphi \cdot u} \rangle_A + O(\varphi^3) \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_A(s, s) i\varphi(s) ds + O(\varphi^3) \right] \Phi_{A_0} \\ &\quad (k_A(t, s) = h_A(t, s) / \sqrt{h_A(t, t)}). \end{aligned}$$

特性汎関数 Φ に対する以上の設定によって $\mathbf{p}\Phi$, $D_t \mathbf{p}(t)\Phi$ を φ の 1 次まで正確に評価できる. また Φ_A , Φ_B の展開式 (4.7), (4.9) に見る通り, Φ における φ の 2 次以下の項は 2 関数 $h_A(t, s)$ と $h_B(t, s)$ (および定数 a, b) のみに依存することが判る.

応答汎関数 G についても

$$(4.10) \quad \begin{aligned} G(t, s) &= aG_A(t, s) + bG_B(t, s) \\ G_A(t, s) &= g_A(t, s)\Phi_A, \quad G_B(t, s) = g_B(t, s)\Phi_B \end{aligned}$$

と置く。ここで G は φ によらぬ項を正しく決めることとし、 $g_A(t, s)$ 、 $g_B(t, s)$ は t と s のみの関数とする。

4.2 相関関数の表現

前節に述べた Φ および G の表現によって、 $\Phi \cdot G$ 方程式はその $\varphi=0, 1$ 次の項に関して擬射影子 \mathbf{p} を含まぬ形となる；

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)D_t\Phi_A + b\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta\right)D_t\Phi_B &= \sigma^2 \int_0^\infty i\varphi(s)(aG_A(s, t) + bG_B(s, t))ds \\ a\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)G_A(t, s) + b\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta\right)G_B(t, s) &= \delta(t-s)(a\Phi_A + b\Phi_B). \end{aligned}$$

第1の方程式の各項は Φ_A または Φ_B のいずれか一方に関係している。そこで $aC_A(t, \varphi) + bC_B(t, \varphi) = 0$ なる汎関数 C_A, C_B を導入して Φ_A に由来する項は C_A に等しく、 Φ_B に由来する項は C_B に等しいと置き、方程式の分割を図る。第2の式も $aD_A + bD_B = 0$ なる汎関数 D_A, D_B によって分割する。次に各汎関数方程式を φ で展開し、0, 1 次の項のみ考慮すると、 $h_A(t, s)$ 、 $h_B(t, s)$ 、 $g_A(t, s)$ および $g_B(t, s)$ に関する4組の微分方程式となる (Appendix B 参照)。但し、展開 $C_A(t, \varphi) = C_A^0(t) + \int_0^\infty C_A^1(t, s)i\varphi(s)ds + \dots$ において $C_A^1(t, s) \left(= -\frac{b}{a}C_B^1(t, s) \right) =$ 定数、と設定した。これは、 $D_t\mathbf{p}(t)\Phi$ の方程式 (3.22) と $D_t\mathbf{p}(t)\Phi = bD_t\mathbf{p}(t)\Phi_B = bD_t\Phi_B + O(\varphi^3)$ の関係から判るように、

$$(4.11) \quad \langle \delta[u(t)]u(s) \rangle = \text{const.}$$

なる近似を行ったことになる (本来この量は関係式 (3.23) を適用して、 Φ から求めるべきであるが、今の場合 Φ における φ の高次項が確定していないので、(3.23) を使えない)。この近似の影響については後述する。境界条件 (3.21) に応じてこの微分方程式の解を求め、さらに定数 a, b および $\Phi \cdot G$ 方程式の分割に際して導入した諸係数を定めれば次の結果に達する。

$$(4.12) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{2}{\sigma_a + \sigma_b} \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix}$$

$$(4.13) \quad \begin{cases} h_A(t, s) = \sigma_a^2 P_A e^{-\alpha|t-s|} + Q_A \\ h_B(t, s) = \sigma_b^2 P_B e^{-(\alpha+\beta)|t-s|} + Q_B \end{cases}$$

$$(4.14) \quad \begin{cases} g_A(t, s) = \begin{cases} P_A e^{-\alpha(t-s)} & t > s \\ P_A/2 & t = s \\ 0 & t < s \end{cases} \\ g_B(t, s) = \begin{cases} P_B e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} & t > s \\ P_B/2 & t = s \\ 0 & t < s \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} P_A \\ P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - Q_A/\sigma_a^2 \\ 1 - Q_B/\sigma_b^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = \frac{2(\sigma_a - \sigma_b)}{\pi} \begin{pmatrix} +\sigma_a \\ -\sigma_b \end{pmatrix}$$

かくして相関関数 $h(t, s)$ の近似表現 $h_{AP}(t, s)$ が

$$(4.15) \quad \begin{aligned} h_{AP}(t, s) &\equiv \langle u(t)u(s) \rangle - \langle u(t) \rangle \langle u(s) \rangle \\ &= D_t D_s \Phi|_{\varphi=0} - D_t \Phi|_{\varphi=0} D_s \Phi|_{\varphi=0} \\ &= \hat{a} \sigma_a^2 e^{-\alpha|t-s|} + \hat{b} \sigma_b^2 e^{-(\alpha+\beta)|t-s|} \\ \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sigma_a + \sigma_b} \begin{pmatrix} \sigma_a - \frac{2}{\pi} (\sigma_a - \sigma_b) \\ \sigma_b + \frac{2}{\pi} (\sigma_a - \sigma_b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められる。同時に

$$\begin{aligned} \langle Y[u(t)]u(t)u(s) \rangle &= D_s D_t \mathbf{p}(t) \Phi|_{\varphi=0} = b D_s D_t \Phi_B|_{\varphi=0} = \frac{1}{2} b h_B(t, s) \\ \langle n(t)u(s) \rangle &= \sigma^2 \langle \frac{\delta u(s)}{\delta n(t)} \rangle = \sigma^2 (a g_A(s, t) + b g_B(s, t)) \end{aligned}$$

により、上記表式 $h_{AP}(t, s)$ は $\langle u(t)u(s) \rangle$ (3.3) の方程式を満たしていること、また物理的に当然期待される関係

$$\langle Y[u(t)]u(t)u(s) \rangle \rightarrow \langle Y[u(t)]u(t) \rangle \langle u(s) \rangle = \frac{\langle u + |u| \rangle}{2} \langle u \rangle \quad (|t-s| \rightarrow \infty)$$

が成り立つことも確かめられる。上述の解法は Langevin 方程式の非線形性に伴って現われた $\mathbf{p}\Phi$ を低次の φ について正しく評価しているが、 $\langle \delta[u(t)]u(s) \rangle$ について近似(4.11)を行っている。この $\langle \delta[u(t)]u(s) \rangle$ に関する方程式を Langevin 方程式から導き、さらに遷移確率 $w(u, t|u_0, s)|_{u=u_0=0}$ は $t > s$ で単調に減少するとの仮定を置けば、真の解 $h(t, s)$ との差が

$$h(t, s) - h_{AP}(t, s) \sim \begin{cases} C \frac{1}{2} (\beta(t-s))^2 e^{-\alpha(t-s)} & \beta(t-s) \ll 1 \\ C \beta(t-s) e^{-\alpha(t-s)} & \beta(t-s) \gg 1 \end{cases} \quad t \geq s$$

$$\left(C = C(\alpha, \beta) = -\frac{2}{\pi} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \sigma_b^2 \right)$$

となることを示し得るから、この近似の誤差は $\beta(t-s)$ の大小にかかわらず十分に小さいとみなせる (Appendix C 参照)。

4.3 等価線形法、およびシミュレーション結果との比較

非線形の Langevin 方程式の厳密な取扱いは一般に困難なため、実用上は種々の近似的解析法が提案されている。その中で代表的なものが等価線形法であり、その適用に際しては対象により若干の差異はあるが本論の問題に即して述べれば次のようになる。まず Langevin 方程式(2.2)における抵抗力の項 $(\alpha + \beta Y(u))u$ を線形表現で置き替えた

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(u - \bar{u}) = n(t)$$

を考える。この方程式が記述する確率過程は定常状態において確率密度

$$f_{eq}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{eq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \bar{u}}{\sigma_{eq}} \right)^2} \quad \left(\sigma_{eq}^2 = \frac{\sigma^2}{2\gamma} \right)$$

を持つ正規過程である。次に、真の過程とこの代替過程における抵抗力の差の二乗期待値

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha + \beta Y(u))u - \gamma(u - \bar{u})^2 \rangle_{eq} \\ & = (\alpha - \gamma)^2 \sigma_{eq}^2 + \alpha^2 \bar{u}^2 + \beta[(2\alpha + \beta)((\sigma_{eq}^2 + \bar{u}^2)P + \sigma_{eq} \bar{u} Q) - 2\gamma \sigma_{eq}^2 P] \\ & P = \frac{1}{2} + N\left(\frac{\bar{u}}{\sigma_{eq}}\right), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{u}}{\sigma_{eq}}\right)^2} \end{aligned}$$

が最小となるように定数 γ , \bar{u} を定める。但しその期待値は代替過程の確率密度 f_{eq} によって計算するというのが等価線形法の骨子である。抵抗係数 α , β の数種の値に対し、数値的最小化により γ , \bar{u} を求めて計算した相関関数

$$h_{eq}(t, s) = \sigma_{eq}^2 e^{-\gamma|t-s|}$$

を、表式 (4.15) による結果と共に図 1 (a)~(e) に示す。同図中にはシミュレーションによる結果も併せて表示した。このシミュレーションは時間軸を $\Delta t = \alpha^{-1}/M$, $M=100$ の幅で刻み、各点で正規乱数を与えた後 Runge-Kutta 法によって Langevin 方程式を積分し、時間平均をとったものである。不連続性が消滅する場合 ($\beta=0$) は本論も等価線形法も一致し共に厳密であるが、図 1 (a) に示すようにシミュレーションとは僅かの隔たりが見られる。これはシミュレーションの精度があまり高くないことによる。不連続性の増加 ($\beta \rightarrow$ 大) に伴い等価線形法はシミュレーションと大なる差異を示すが、本結果は常にほとんど一致し、シミュレーションの誤差の範囲にとどまっている。

5. 終わりに

不連続な抵抗係数を持つブラウン粒子の統計的性質、特に相関関数を明らかにするため、非線形の Langevin 方程式から出発し、特性汎関数、不完全特性汎関数、およびその両者を結ぶ擬射影子による理論を以上 4 章に亘り展開した。特性汎関数は多時刻モーメントの母関数であり、第 3 章に導いた汎関数方程式は無限箇のモーメント方程式群に相当する。従って非線形確率微分方程式に対して統計量決定のための閉じた方程式系を導くことができないというモーメント法の弱点が除かれたことになる。

また、Fokker-Planck 方程式の固有関数によって遷移確率と相関関数の級数表現を与える通常の方法は、Langevin 方程式に不連続関数が含まれるため適用し難いが、本論では擬射影子を導入して不連続性の影響を考慮し、相関関数の近似表現を固有関数展開によらずに求めた。以上の点から、本論の解析法は確率微分方程式の不連続性と非線形性に伴う困難の一部を克服したものと考えられる。

今後取り組むべき課題は、先ず $\Phi \cdot G$ 方程式の完全な解を見出すことである。本論では単に相関関数の決定に必要な範囲に限って特性汎関数を定めたに過ぎない。汎関数方程式論の発展によって $\Phi \cdot G$ 方程式の厳密解を求め、特性汎関数の全容を明らかにすることが望まれる。次の課題は履歴現象への応用である。変圧器の電圧電流特性や粘弾性物質の変形は系の状態変数の変化速度の正負により方程式の型が異なるが、その簡単な場合は不連続抵抗係数を持つ 2 次元の Langevin 方程式となるから本解析法の応用が期待できる。

最後に、確率微分方程式の取扱いについて懇切にご教示下さった東京工業大学の志賀徳造先生に御礼申し上げます。

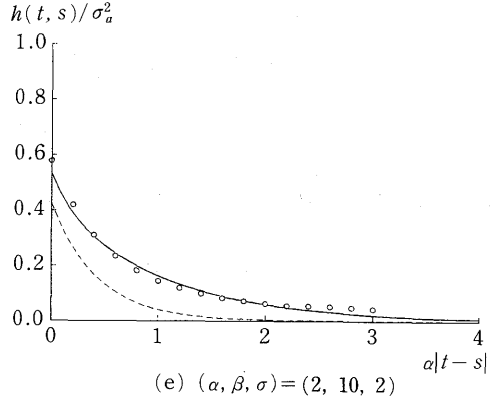
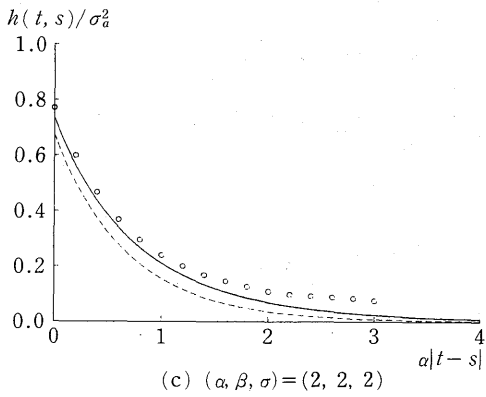
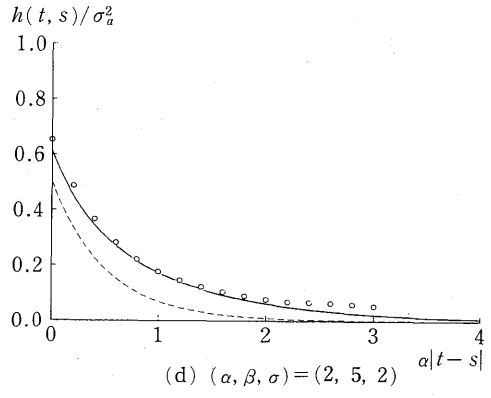
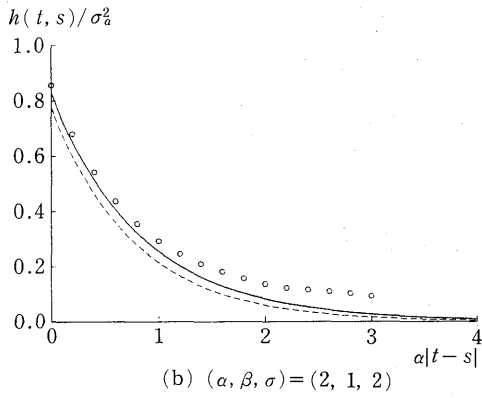
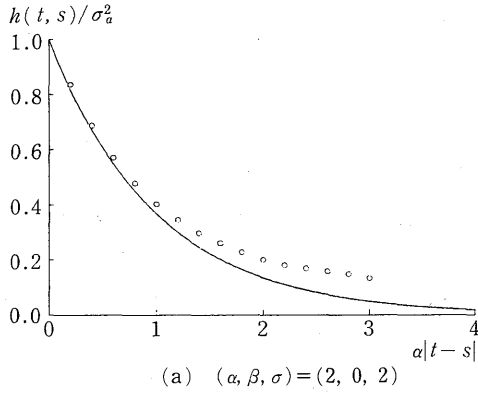


図1. 相関関数 $h(t, s)$ の計算結果 ○: シミュレーション, ---: 等価線形法, —: 本論.

Appendix A

正規過程の不完全特性汎関数の表現

正規過程の特性汎関数 $\Phi = \Phi_{\text{normal}}$ (3.14) に関し

$$\tilde{\Phi}_t = p(t)\Phi$$

を求める。時間軸 $t \geq 0$ を $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_i - t_{i-1} = \Delta$) と分割し、 $\varphi(\cdot)$ および $h(\cdot, \cdot)$ の離散表現

$$\varphi_j = \varphi(t_j), \quad h_{ij} = h_{ji} = h(t_i, t_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

を与え

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n, \quad \Phi_n = \Phi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \equiv e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} \varphi_i \varphi_j \Delta^2}$$

を仮定する。固定した $t = t_i$ に対し $\varphi_j^i = \begin{cases} \phi & j=i \\ \varphi_j & j \neq i \end{cases}$ と置き

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} h_{jk} \varphi_j^i \varphi_k^i \Delta^2 &= a^2 (i\phi)^2 + 2bi\phi + c^2 \\ \begin{pmatrix} a^2 \\ 2b \\ c^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{ii} \Delta^2 \\ \sum_{l \neq i} (h_{il} + h_{li}) i \varphi_l \Delta^2 \\ \sum_{k, l \neq i} h_{kl} i \varphi_k i \varphi_l \Delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\phi - \varphi_i} \Phi_n(\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_n^i) = e^{c^2/2} \int \frac{d\phi}{\phi - \varphi_i} e^{a^2(i\phi)^2/2 + bi\phi} \\ &= e^{(a^2(i\varphi_i)^2 + 2bi\varphi_i + c^2)/2} \int \frac{d\phi}{\phi} e^{a^2(i\phi)^2/2 + (b + a^2 i \varphi_i) i \phi} \\ &= e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} \varphi_i \varphi_j \Delta^2} 2\pi i N \left(\frac{b}{a} + ai\varphi_i \right) = \Phi_n 2\pi i N \left(\sum_l h_{il} i \varphi_l / \sqrt{h_{ii}} \right) \\ &\quad \left(\frac{b}{a} + ai\varphi_i = \sum_l \frac{(h_{il} + h_{li})}{2\sqrt{h_{ii}}} i \varphi_l = \sum_l \frac{h_{il}}{\sqrt{h_{ii}}} i \varphi_l \right) \end{aligned}$$

となる。そこで $n \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ とすれば

$$\lim I_n \equiv I = e^{\frac{1}{2} \iint h(t,s) i \varphi(t) i \varphi(s) dt ds} 2\pi i N \left(\int \frac{h(t,s)}{\sqrt{h(t,t)}} i \varphi(s) ds \right).$$

従って (3.12) から

$$\tilde{\Phi}_t = \frac{1}{2\pi i} I + \frac{1}{2} \Phi$$

を得る。これは (3.15) に他ならない。

Appendix B

相関関数の表現

特性汎関数 Φ と応答汎関数 G の表式 (4.1), (4.10), および Φ_A, Φ_B に課した条件 (4.2) により, $\Phi \cdot G$ 方程式は次の形を持つ;

$$(B.1) \quad \begin{cases} L(\Phi, G) \equiv aL_A + bL_B = 0 \\ M(\Phi, G) \equiv aM_A + bM_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) D_t \Phi_A & - \int i\varphi(s) g_A(s, t) \Phi_A ds \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta\right) D_t \Phi_B & - \int i\varphi(s) g_B(s, t) \Phi_B ds \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) g_A(t, s) \Phi_A & - \delta(t-s) \Phi_A \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta\right) g_B(t, s) \Phi_B & - \delta(t-s) \Phi_B \end{pmatrix}$$

ここで

$$(B.2) \quad aC_A(\varphi) + bC_B(\varphi) = 0, \quad aD_A(\varphi) + bD_B(\varphi) = 0$$

なる汎関数 $C_A \sim D_B$ を導入し, 原方程式を Φ_A, Φ_B の各々にも関与する項に分割する;

$$(B.3) \quad \begin{aligned} L_A - C_A &= 0, & L_B - C_B &= 0 \\ M_A - \delta(t-s)D_A &= 0, & M_B - \delta(t-s)D_B &= 0. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} L_A &= \left(L_A^0(t) + \int_0^\infty L_A^1(t, s) i\varphi(s) ds + o(\varphi^2) \right) \Phi_{A_0} \\ L_B &= \left(L_B^0(t) + \int_0^\infty L_B^1(t, s) i\varphi(s) ds + o(\varphi^2) \right) \Phi_{B_0} \end{aligned}$$

と展開し ($M_A \sim D_B$ についても同様), 係数 C_A^1, C_B^1 は $t-s$ によらぬ定数とする. 相関関数 h を定めるには $L=0$ について L^0 と L^1 の項を, $M=0$ については M^0 の項を扱えば充分であることに留意すると, (B.3) は次の方程式系に帰着する;

$$(B.4) \quad L_A^0 - C_A^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_A(t, t) \right) - C_A^0 = 0$$

$$(B.5) \quad L_B^0 - C_B^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta \right) \left(+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_B(t, t) \right) - C_B^0 = 0$$

$$(B.6) \quad L_A^1 - C_A^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) h_A(t, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 g_A(s, t) - C_A^1 = 0$$

$$(B.7) \quad L_B^1 - C_B^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta \right) h_B(t, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 g_B(s, t) - C_B^1 = 0$$

$$(B.8) \quad M_A^0 - \delta(t-s)D_A^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) g_A(t, s) - \delta(t-s)(1 + D_A^0) = 0$$

$$(B.9) \quad M_B^0 - \delta(t-s)D_B^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \beta \right) g_B(t, s) - \delta(t-s)(1 + D_B^0) = 0.$$

先ず(B.8), (B.9)の両式を条件 $g_A(t, s) = g_B(t, s) = 0, t < s$ (境界条件 (3.21) による)のもとに解けば

$$g_A(t, s) = \begin{cases} (1 + D_A^0)e^{-\alpha(t-s)} & t > s \\ (1 + D_A^0)/2 & t = s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

$$g_B(t, s) = \begin{cases} (1 + D_B^0)e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} & t > s \\ (1 + D_B^0)/2 & t = s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

となる. これを(B.6), (B.7)に代入すれば, 定常過程の要請 ($h_A(t, s), h_B(t, s)$ は $|t-s|$ の関数)から

$$h_A(t, s) = \sigma_a^2(1 + D_A^0)e^{-\alpha|t-s|} + 2C_A^1/\alpha$$

$$h_B(t, s) = \sigma_b^2(1 + D_B^0)e^{-(\alpha+\beta)|t-s|} + 2C_B^1/(\alpha+\beta)$$

なる表式を得る.

定数 a, b と $C_A^0 \sim D_B^0$ は次のように決まる.

(a) (B.4), (B.5) から (定常ゆえ $\frac{\partial}{\partial t}k_A(t, t) = \frac{\partial}{\partial t}k_B(t, t) = 0$ である)

$$C_A^0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ak_A(t, t), \quad C_B^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\alpha+\beta)k_B(t, t)$$

(b) (3.21) により

$$\Phi|_{\varphi=0} = a\Phi_A|_{\varphi=0} + b\Phi_B|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 1$$

(c) (B.2) から

$$aC_A^0 + bC_B^0 = -aak_A(t, t) + b(\alpha+\beta)k_B(t, t) = 0$$

(d) 1時刻統計量の表式 (2.6) と $\langle u(t) \rangle = D_t\Phi|_{\varphi=0}$ とから

$$\langle u \rangle = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sigma_a - \sigma_b) = a\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}k_A(t, t)\right) + b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}k_B(t, t)$$

(e) $\langle u^2 \rangle = D_t\Phi|_{\varphi=0}$ により

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\sigma_a^3 + \sigma_b^3}{\sigma_a + \sigma_b} = \frac{1}{2}ah_A(t, t) + \frac{1}{2}bh_B(t, t) = \frac{1}{2}ak_A(t, t)^2 + \frac{1}{2}bk_B(t, t)^2$$

以上5式から

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{2}{\sigma_a + \sigma_b} \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_A(t, t)^2 \\ k_B(t, t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix}$$

(f) 相関関数

$$(B.10) \quad h(t, s) = D_t D_s \Phi|_{\varphi=0} - D_t \Phi|_{\varphi=0} D_s \Phi|_{\varphi=0}$$

$$= \frac{1}{2}ah_A(t, s) + \frac{1}{2}bh_B(t, s) - \langle u \rangle^2$$

に対する物理的要請 $h(t, s) \rightarrow 0$ ($|t-s| \rightarrow \infty$) と $aC_A^1 + bC_B^1 = 0$ から

$$\begin{pmatrix} \frac{C_A^1}{\alpha} \\ \frac{C_B^1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\pi} \begin{pmatrix} +\sigma_a \\ -\sigma_b \end{pmatrix}$$

(g) さらに

$$\begin{aligned} k_A^2(t, t) &= h_A(t, t) = \sigma_a^2(1 + D_A^0) + 2C_A^1/\alpha \\ k_B^2(t, t) &= h_B(t, t) = \sigma_b^2(1 + D_B^0) + 2C_B^1/(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

によって

$$\begin{pmatrix} D_A^0 \\ D_B^0 \end{pmatrix} = \frac{2(\sigma_a - \sigma_b)}{\pi} \begin{pmatrix} 1/\sigma_a \\ 1/\sigma_b \end{pmatrix}$$

を得る。以上で全ての係数が定まった。これを $g_A \sim h_B$ の式に代入し (B.10) を用いれば $h_{AP}(t, s)$ の表式 (4.15) を得る。

Appendix C

近似表現の精度

遷移確率の時間変化に関する若干の仮定のもとに、相関関数 $l(t) = h(t, 0) = \langle u(t)u(0) \rangle - \langle u \rangle^2$ の上下限を求め、近似表現 (4.15) の精度を評価する。以下 $t > 0$ とし、

$$l_A(t) = \langle (1 - Y[u(t)])u(t)u(0) \rangle, \quad l_B(t) = \langle Y[u(t)]u(t)u(0) \rangle$$

と記す。特性汎関数 Φ の方程式 (3.19) と $D_t \mathbf{p}(t) \Phi = \langle Y[u(t)]u(t)e^{i\varphi \cdot u} \rangle$ の方程式 (3.22) を $\varphi(0)$ で微分した後 $\varphi = 0$ と置き、 $G(0, t) = 0$ (3.21) に注意すれば l_A, l_B を定める式は

$$(C.1) \quad \frac{dl_A}{dt} = -\alpha l_A(t) - \frac{\sigma^2}{2} y(t)$$

$$(C.2) \quad \frac{dl_B}{dt} = -(\alpha + \beta) l_B(t) + \frac{\sigma^2}{2} y(t)$$

と書かれる。ここに

$$(C.3) \quad y(t) = \langle \delta[u(t)]u(0) \rangle$$

である。定常確率密度 f (2.4) によって、初期値 $l_A(0), l_B(0)$ を計算し、(C.1), (C.2) の解を求めると、相関関数は次のように表される;

$$(C.4) \quad \begin{aligned} l(t) &= l_A(t) + l_B(t) - \langle u \rangle^2 \\ &= A e^{-\alpha t} + B e^{-(\alpha + \beta)t} - \langle u \rangle^2 + R(t). \end{aligned}$$

ここに

$$(C.5) \quad \begin{aligned} A &= \frac{\sigma_a^3}{\sigma_a + \sigma_b}, & B &= \frac{\sigma_b^3}{\sigma_a + \sigma_b} \\ R(t) &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t d\tau (e^{-\alpha\tau} - e^{-(\alpha + \beta)\tau}) y(t - \tau) \end{aligned}$$

である。4.2 節で述べたように関数 $y(t)$ を厳密に定めることは困難なので、以下 $y(t)$ の上下限

を調べる. 1次元 Langevin 方程式に対して詳細釣り合い $y(t) = \langle u(t) \delta[u(0)] \rangle$ が成り立つことに留意すると, Langevin 方程式と Novikov の公式 (2.13) から次の方程式が得られる;

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\alpha y(t) - \beta x(t) \\ \frac{dx}{dt} &= -(\alpha + \beta)x(t) + \frac{\sigma^2}{2} z(t). \end{aligned}$$

ここに

$$x(t) = \langle Y[u(t)] u(t) \delta[u(0)] \rangle, \quad z(t) = \langle \delta[u(t)] \delta[u(0)] \rangle$$

である. 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ のもとに解けば

$$(C.6) \quad x(t) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t d\tau e^{-(\alpha+\beta)\tau} z(t-\tau) \geq 0$$

$$(C.7) \quad y(t) = -\beta \int_0^t d\tau e^{-\alpha\tau} x(t-\tau) \leq 0$$

を得る.

さて, 遷移確率 $w(ut|00) = w(ut|u_0s)|_{u_0=s=0}$ は $t=0$ で原点に集中した初期分布 $\delta(u)$ を持つが, この分布は $\int_{-\infty}^{\infty} w du = 1$ を満たしつつ $t > 0$ で $u \neq 0$ に拡散し, 定常確率密度 $f(u)$ に漸近する. そこで $z(t) = w(0t|00)f(0)$ は時間 t と共に単調に減少し, $x(t) = \int_0^{\infty} uw(ut|00)du$ は単調に増加すると仮定する. 即ち

$$(C.8) \quad \begin{aligned} z(t) &\geq z_{\infty} = \langle \delta(u) \rangle^2 = f(0)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(\sigma_a + \sigma_b)^2} \\ x(t) &\leq x_{\infty} = \langle Y(u)u \rangle \langle \delta(u) \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_b^2}{(\sigma_a + \sigma_b)^2}. \end{aligned}$$

このとき第1の仮定と $x(t)$ の表式 (C.6) から

$$(C.9) \quad x(t) \geq \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t d\tau e^{-(\alpha+\beta)\tau} x_{\infty} = x_{\infty}(1 - e^{-\alpha t})$$

となり, (C.7), (C.8) および (C.9) によって $y(t)$ の限界は

$$\begin{aligned} y_{\min}(t) &\leq y(t) \leq y_{\max}(t) \\ y_{\min}(t) &= y_{\infty}(1 - e^{-\alpha t}), \quad y_{\max}(t) = y_{\infty} + z_{\infty}(\sigma_a^2 e^{-\alpha t} - \sigma_b^2 e^{-(\alpha+\beta)t}) \end{aligned}$$

と与えられる. ここに

$$y_{\infty} = \langle u \rangle \langle \delta(u) \rangle = -z_{\infty}(\sigma_a^2 - \sigma_b^2) = -\frac{2}{\pi} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}$$

である. 従って関数 $R(t)$ についても

$$R_{\min}(t) \leq R(t) \leq R_{\max}(t)$$

$$\begin{aligned}
 R_{\min}(t) &= \langle u \rangle^2 (1 - e^{-at}) + y_{\infty} \sigma_b^2 (e^{-at} - e^{-(a+\beta)t}) \\
 &\quad + z_{\infty} \sigma_b^2 [(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)(e^{-at}(1-\beta t) - e^{-(a+\beta)t}) + \sigma_b^2 \beta t (e^{-at} - e^{-(a+\beta)t})] \\
 R_{\max}(t) &= \langle u \rangle^2 (1 - e^{-at}) + y_{\infty} \sigma_b^2 \beta t e^{-at}
 \end{aligned}$$

を得る。一方、4.2 節に求めた近似表現 (4.15) を $h_{AP}(t, 0) = l_{AP}(t)$ と記せば

$$l_{AP}(t) = A e^{-at} + B e^{-(a+\beta)t} - \langle u \rangle^2 + \langle u \rangle^2 (1 - e^{-at}) + y_{\infty} \sigma_b^2 (e^{-at} - e^{-(a+\beta)t})$$

と書き換えられるから (この表現は $y(t) = y_{\infty}$ として $R(t)$ を算出した結果と一致する), (C.4) と比較すれば真の解との差 $l(t) - l_{AP}(t)$ について次の評価を得る;

$$\Delta_{\min}(t) \leq l(t) - l_{AP}(t) \leq \Delta_{\max}(t)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\min}(t) &= z_{\infty} \sigma_b^2 [(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)(e^{-at}(1-\beta t) - e^{-(a+\beta)t}) + \sigma_b^2 \beta t (e^{-at} - e^{-(a+\beta)t})] \\
 \Delta_{\max}(t) &= -y_{\infty} (e^{-at}(1-\beta t) - e^{-(a+\beta)t}).
 \end{aligned}$$

特に βt が大, または小なる場合は

$$(C.10) \quad \Delta_S(t) \leq l(t) - l_{AP}(t) \leq \Delta_S(t) + z_{\infty} \sigma_b^4 \frac{(\beta t)^3}{6} e^{-at} \quad \beta t \ll 1$$

$$(C.11) \quad \Delta_L(t) \leq l(t) - l_{AP}(t) \leq \Delta_L(t) + z_{\infty} \sigma_b^4 \beta t e^{-at} \quad \beta t \gg 1$$

となる。但し

$$\begin{aligned}
 \Delta_S(t) &= y_{\infty} \sigma_b^2 \left(\frac{(\beta t)^2}{2} - \frac{(\beta t)^3}{6} \right) e^{-at} - z_{\infty} \sigma_b^4 \frac{(\beta t)^3}{6} e^{-at} \\
 \Delta_L(t) &= y_{\infty} \sigma_b^2 \beta t e^{-at}
 \end{aligned}$$

である。

参 考 文 献

- Bixon, M. and Zwanzig, R. (1971). Brownian motion of a nonlinear oscillator, *J. Statist. Phys.*, **3**, 245-260.
- Budgor, A.B., Lindenberg, K. and Shuler, K.E. (1976). Studies in nonlinear stochastic processes: approximate solution of nonlinear stochastic differential equations by the method of statistical linearization, *Statistical Physics*, **15**, 355-374.
- Kitahara, K., Horstemke, W. and Lefever, R. (1979). Coloured noise induced transitions: exact results for external dichotomous Markovian noise, *Physics Letters*, **70A**, 377-380.
- Monin, A.C. and Yaglom, A.M. (1967). *Statistical Hydromechanics*, Vol. 2, p. 639, Nauka, Moscow (in Russian).
- Novikov, E.A. (1964). Functionals and the method of stochastic forces in the theory of turbulence, *J. Exp. Teop. Fiz.*, **47**, 1919-1926 (in Russian).
- Soong, T.T. (1973). *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York.
- Stratonovich, R.L. (1963). *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. 1, Gordon and Breach, New York.
- Wishner, R.P. (1960). On Markov processes in control systems, Rep. R-116, Sci. Lab., University of Illinois, Springfield.
- Valsakumar, M.C. (1985). Unstable state dynamics: treatment of coloured noise, *J. Statist. Phys.*, **39**, 347-365.

Brownian Motion with a Discrete Drag Coefficient and Its Analysis
in Terms of Characteristic Functionals

Takashi Okasaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

A functional formalism is presented concerning with the stochastic process of a Brownian particle whose drag coefficient varies discretely depending on whether its velocity is positive or not. The nonlinear feature of the Langevin equation describing the stochastic process makes it difficult to apply the conventional Fokker-Planck equation approach to the determination of multi-time statistics including the velocity correlation function.

To handle this situation, a new approach is developed in terms of two functionals and of a pseudo-projection operator. The characteristic functional (CHFL) is defined, as a generalization of ordinary characteristic functions, to be a generator of multi-time moment functions. The other functional, the incomplete characteristic functional (ICHFL) is defined similarly to CHFL, except that it depends on time as well; it bears information about statistics of particle velocities of positive values alone as far as that particular time is concerned. The pseudo-projection operator \mathbf{p} is devised to project CHFL onto ICHFL.

Novikov's formula (which evaluates averages of Gaussian-process-dependent functionals) allows one to derive from the Langevin equation a set of functional differential equations governing CHFL, ICHFL and yet another functional (IRFL) related with unit impulses of the driving noise process (assumed to be a Gaussian white process). Supplemented with appropriate boundary conditions and compatibility conditions and with the defining expression for the operator \mathbf{p} , this set of functional equations determine completely the CHFL, and hence, multi-time statistics.

Setting CHFL to be a linear combination of two auxiliary functionals of definite structure, one perpendicular to \mathbf{p} , and the other invariant (in a restricted sense) under \mathbf{p} , one can reduce the functional differential equations to a set of ordinary differential equations. A solution to these equations is found to fix the first few terms in the test-function-expansion of CHFL and of IRFL, and thereby to yield an approximate expression for the velocity correlation function. Numerical simulation is performed to compare with the correlation function thus obtained. The present result agrees with simulated ones precisely, in contrast with the poor agreement displayed by that of statistical linearization techniques.