

# 射影子法による Fokker-Planck 方程式の一般化 —— 付加的な外乱を受ける確率過程の研究 ——

統計数理研究所 岡 崎 卓

(1990 年 2 月 受付)

## 1. はじめに

ブラウン運動を初めとして、雑音の混入する電気回路や波浪を受けて動揺する船体など理工学上の多くの分野で確率過程の研究が行われている。確率微分方程式で記述される過程の統計的性質の探求に際し、Fokker-Planck 方程式は不可欠の役割を果たしている。それは確率過程にとって基本的に重要な確率密度を決定する能力を有しているからである。

この Fokker-Planck 方程式が正しい内容をもつのは、目的とする確率過程の変数と、この過程に加わる外乱（外的揺動力、noise）を同等に考慮するときに限られる。目的変数の過程と外乱の過程とを併せ、合成系として捉えるならば、Fokker-Planck 方程式は両者の結合確率密度を正確に決定する。しかし通常は目的変数のみに関する Fokker-Planck 方程式を扱うことが多い。この場合、外乱の分散または自己相関関数の積分値が Fokker-Planck 方程式に関与するだけであるから、外乱の情報は部分的に取り込まれるに過ぎず、外乱が無相関の白色過程であっても相関をもつ有色過程であってもその差異は検出されない。目的変数のみに関する Fokker-Planck 方程式は対象とする過程の確率密度を簡便に決定する代わりに、目的変数と外乱との相互作用を正確に記述せず、外乱の特性を十分に反映しない恐れがある。

それでは、目的変数の確率密度だけを未知数として含み、且つ外乱の特性を充分に取り入れた一般的な Fokker-Planck 方程式は導けないであろうか。本論の目的はここにある。即ち、目的変数および外乱を併せた全系に対する Fokker-Planck 方程式から目的変数のみに関する確率密度を正しく定める“一般化 Fokker-Planck (GFP) 方程式”を導くことである。この課題は任意の外乱に対して厳密に成り立つことを求める点では Fokker-Planck 方程式の一般化であり、目的変数と外乱の合成系から目的変数だけの記述にまとめる点では Fokker-Planck 方程式の縮約であり、あるいはまた外乱の情報を 1 個の方程式に組み込む点では確率過程の統合であると言うこともできる。

方程式の縮約については既に統計力学において種々の方法が開発されている。分子や原子など多数の微視的要素から成る物質の巨視的性質を見出す作業は、多数の微視的変数に関する方程式系を密度や速度など少数の巨視的変数の方程式に縮約することに他ならない。本論では統計力学の射影子法 (Grabert (1982)) を適用し、目的変数および外乱を微視的変数になぞらえ、巨視的変数として改めて目的変数を選んでこの縮約を行い、目的変数の確率密度を支配する GFP 方程式を求める。

射影子法は、巨視的変数の時間発展式に現れる微視量を巨視的変数の空間に写して、巨視的変数のみで閉じた方程式を見出す手段である。この点に関して本論は統計力学と同じ立場である。但し、統計力学における微視的変数は Hamiltonian をもち、従ってその確率密度を支配す

る Liouville 作用素は 1 階の微分演算子のごとき作用をなすに対し, Fokker-Planck 作用素は 2 階の微分演算子を含むため統計力学の射影子法をそのままの形式で踏襲することはできない. また, 統計力学では全系の平衡確率分布を既知として射影子を構成するが, 確率過程の問題にあっては平衡分布すなわち定常確率分布こそ見出すべき量である. そこで本論では射影子の構成と理論の展開に独特の工夫を行う.

まず第 2 章では目的変数と外乱の時間発展を記述する確率微分方程式から出発し, 射影子の導入を経て GFP 方程式の導出に至る過程を述べる. 続く第 3 章でこの方程式に対する近似表現の達成に触れる. GFP 方程式は確かに目的変数の確率密度を厳密に決定するが, 形式的な作用素で書かれた方程式のため実用に困難を呈する恐れがある. そこで外乱と目的変数との相互作用に関する展開を行って実用に供し得る程度の複雑さをもつ方程式に書き替え, 簡単なモデルによりその妥当性を確認する.

尚, 外乱と目的変数との接触は相乗的でなく付加的とする. 付加的であれば, 外乱は目的変数の過程に非線形的に加わってよい. また, 記述の簡明を図るため目的変数, 外乱ともそれぞれ 1 変数とする.

## 2. 一般化 Fokker-Planck (GFP) 方程式の導出

### 2.1 結合確率密度の Fokker-Planck 方程式と位相関数の期待値

不規則外乱  $W$  の影響を受けつつ発展する確率過程  $U(t) (t \geq 0)$  を考える. この過程は微分方程式

$$(2.1) \quad \dot{U} = M(U) + m(W)$$

で記述されるものとする. ここに“ $\cdot$ ”は時間  $t$  による微分  $\frac{d}{dt}$  を意味し,  $M(U)$  はこの過程の基本的構造を,  $m(W)$  は外乱  $W$  の作用を表す. 外乱は付加的に作用するものとし,  $m$  は  $U$  によらぬ  $W$  のみの連続関数とする. また外乱  $W$  は方程式

$$(2.2) \quad \dot{W} = N(W) + n(t)$$

に従って発展する確率過程とする. ここで駆動力を意味する  $n$  は平均値零, 分散  $\sigma^2$  の正規白色過程とする. 即ち期待値を  $\langle \dots \rangle$  と記せば

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= 0 \\ \langle n(t)n(s) \rangle &= \sigma^2 \delta(t-s) \end{aligned}$$

である. 上記方程式 (2.1), (2.2) において  $U, W$  各系の構造を規定する関数  $M, N$  はそれぞれ  $U, W$  の連続関数とする. 以下, 確率過程  $U(\cdot)$  の統計的性質に主眼を置き,  $U$  を目的変数とも呼ぶ.

目的変数  $U(t)$  および外乱  $W(t)$  の張る位相空間を  $\Omega$  と記せば,  $U(t), W(t)$  の結合確率密度  $\rho = \rho(t) = \rho(t; U, W) ((U, W) \in \Omega)$  は駆動力  $n$  の正規白色性により Fokker-Planck 方程式 (Stratonovich (1963))

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = -iL\rho$$

$$(2.4) \quad -iL \equiv -D_U \dot{U} - D_W N(W) + \frac{\sigma^2}{2} D_W^2$$

$$\begin{pmatrix} D_u \\ D_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial U} \\ \frac{\partial}{\partial W} \end{pmatrix}$$

を満たす。ここに  $i$  は虚数単位 ( $i^2 = -1$ ) である (Fokker-Planck 作用素  $iL$  の定義を変更して  $i$  を除くこともできるが、統計力学の定式化との照合を図るため残存させる)。確率密度  $\rho$  はこの方程式に従い、且つ無限遠消失の境界条件

$$(2.5) \quad \rho \rightarrow 0 \quad (\text{且つ、あるいは個々に } |U| \rightarrow \infty, |W| \rightarrow \infty)$$

と規格化条件

$$(2.6) \quad \text{tr}\{\rho\} = 1$$

に服しつつ変化発展する。ここに  $\text{tr}\{X\}$  は位相空間  $\Omega$  上に定義された位相関数  $X = X(U, W)$  の積分

$$\text{tr}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(U, W) dU dW$$

である。結合確率密度の初期値を  $\rho(0)$  とすれば、(2.3) から任意の時刻  $t > 0$  における  $\rho = \rho(t)$  が Fokker-Planck 作用素  $iL$  を用いて

$$\rho(t) = e^{-iL t} \rho(0)$$

と表される。これは位相空間  $\Omega$  に描かれる軌跡  $\rho(t)$  ( $t \geq 0$ ) の記述に他ならない。

任意の位相関数  $X = X(U, W)$  の時刻  $t$  における期待値は

$$(2.7) \quad \langle X \rangle_t = \text{tr}\{\rho(t) X\}$$

によって与えられる。部分積分を行って (2.5) を使えば、この期待値はまた任意の位相関数  $X$  に対して

$$\text{tr}\{(-iL\rho)X\} = \text{tr}\{\rho i\hat{L}X\}$$

を満たす  $-iL$  の随伴作用素

$$i\hat{L} = \dot{U}D_u + N(W)D_w + \frac{\sigma^2}{2} D_w^2$$

によって

$$(2.8) \quad \langle X \rangle_t = \text{tr}\{\rho(0) X_t\} = \langle X_t \rangle_0$$

$$(2.9) \quad X_t \equiv e^{iL t} X$$

とも書くことができる。作用素  $e^{iL t}$  は時刻を  $t$  だけ進める時間進行子であって、量子力学の言葉で言えば前者 (2.7) は Schrödinger 表示に、後者 (2.8) は Heisenberg 表示に対応する。

位相関数として特に  $\delta$  関数

$$\phi_u = \delta(U - u)$$

を選べば、その期待値は  $U$  の確率密度  $f$  を与える、

$$(2.10) \quad f(u, t) = \text{tr}\{\rho(t)\psi_u\} = \text{tr}\{\rho(0)\psi_u(t)\}$$

$$(2.11) \quad \psi_u(t) = e^{iLt}\psi_u.$$

この意味で  $\psi_u(t)$  を密度生成関数と名付ける ( $\psi_u(t)$  に対しては (2.9) の記法  $\psi_{ut}$  に拠らず、時間  $t$  を ( ) 内に記す)。尚、 $Y$  が  $U$  のみの位相関数ならば

$$[Y(U)\psi_u]_t = e^{iLt}Y(U)\psi_u = e^{iLt}Y(u)\psi_u = Y(u)\psi_u(t) \neq Y(U)\psi_u(t)$$

である。同様に外乱  $W$  の確率密度は

$$g(w, t) = \text{tr}\{\rho(t)\delta(W-w)\}$$

与えられる。上式を  $t$  で微分し、 $\rho$  の方程式 (2.3) と条件 (2.5), (2.6) を用いれば  $g(W, t) = g(w, t)|_{w=W}$  の満たす方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -iLg = \left(-D_w N(W) + \frac{\sigma^2}{2} D_w^2\right)g$$

が容易に得られる。しかし作用素  $iL$  には  $U$  を通じ変数  $U$  と外乱  $W$  の相互作用に起因する項  $D_w N(W)$  が含まれるため、目的変数の確率密度  $f(u, t)$  を支配する方程式は (2.10) 式の単なる時間微分では求められない。

## 2.2 準確率密度と射影子

確率密度  $f(u, t)$  の方程式を見出すため、統計力学の射影子法に倣い準確率密度を導入する。統計力学では多く正準集合分布をもとに準確率密度を構成するが、本論では変数  $U, W$  各々の確率密度の積として次のように与える、

$$(2.12) \quad \bar{\rho}(t) = f(U, t)g(W, t).$$

この準確率密度  $\bar{\rho}$  は確率密度としての資格

$$\text{tr}\{\bar{\rho}\} = 1, \quad \bar{\rho} \geq 0$$

を備えており、且つ

$$\text{tr}\{\bar{\rho}(t)\psi_u\} = f(u, t) = \text{tr}\{\rho(t)\psi_u\}$$

であって、 $\psi_u$  の期待値に関しては真の結合確率密度と同一の結果をもたらすが、他の量については  $\bar{\rho}$  による期待値と  $\rho$  によるそれとは一般に等しくない。また  $\rho$  と異なり  $\bar{\rho}$  の時間変化は  $f(U, t)$  および  $g(W, t)$  を介して現れる。

次に、位相関数  $X = X(U, W)$  に作用する演算子  $\mathbf{p}$  を

$$(2.13) \quad \mathbf{p}(t)X = \int du \psi_u \text{tr}\{g(W, t)\psi_u X\} \\ \left( \begin{aligned} &= \int du \delta(U-u) \int dU' \int dW' g(W', t) \delta(U'-u) X(U', W') \\ &= \int dW g(W, t) X(U, W) \end{aligned} \right)$$

で定義すれば, 自明の関係  $\phi_u \phi_v = \delta(u-v)\phi_u$  に因って

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{p}(t)1 &= 1 \\ \mathbf{p}(t)\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(t) \end{aligned}$$

が成り立ち, 従って  $\mathbf{p}$  は射影子であることが判る. 上の定義に見るように  $\mathbf{p}$  は任意の位相関数を  $\phi_u$  の線形結合の空間に写す. 特に  $\phi_u$  をそれ自身に写す;

$$(2.15) \quad \mathbf{p}\phi_u = \phi_u.$$

$U$  のみに依存する位相関数  $Y(U)$  もまた  $\mathbf{p}$  の作用に不変である;

$$(2.16) \quad \mathbf{p}Y(U) = \mathbf{p} \int du \phi_u Y(u) = Y(U).$$

時刻を異にする射影子の相互関係については

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t)X &= \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, t)\phi_v \int du \phi_u\} \operatorname{tr}\{g(W, t)\phi_u X\} \\ &= \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, t)\phi_v X\} = \mathbf{p}(t)X \end{aligned}$$

即ち

$$\mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t)$$

を導くことができ, 従って

$$(2.17) \quad (1 - \mathbf{p}(s))(1 - \mathbf{p}(t)) = 1 - \mathbf{p}(s)$$

が成り立つ. 射影子  $\mathbf{p}$  の時間微分  $\dot{\mathbf{p}}$  は

$$(2.18) \quad \dot{\mathbf{p}}(t)X = \frac{d\mathbf{p}}{dt} X = \int du \phi_u \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial g(W, t)}{\partial t} \phi_u X\right\}$$

なる作用をもち,  $\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial g(W, t)}{\partial t} \phi_u\right\} = 0$  によって

$$\dot{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{p}\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}$$

である.

Fokker-Planck 作用素  $iL$  の随伴  $i\hat{L}$  と同様, 任意の位相関数  $X = X(U, W)$ ,  $Y = Y(U, W)$  に対し  $\operatorname{tr}\{\hat{\mathbf{p}}X\}Y = \operatorname{tr}\{X\mathbf{p}Y\}$  を満たす  $\mathbf{p}$  の随伴  $\hat{\mathbf{p}}$  を

$$\hat{\mathbf{p}}Y = g(W, t) \int du \phi_u \operatorname{tr}\{\phi_u Y\}$$

によって導入すると, この作用素は

$$(2.19) \quad \hat{\mathbf{p}}\rho = \bar{\rho}$$

のように, 真の確率密度  $\rho$  を準確率密度  $\bar{\rho}$  に射影し, また明らかに

$$(2.20) \quad \hat{\mathbf{p}}(t)(g(W, t)Y) = g(W, t)\mathbf{p}(t)Y$$

の成立することが判る。

### 2.3 GFP 方程式

確率密度  $f(u, t)$  を支配する方程式を導くにあたって鍵となる恒等式をまずあげる。時間進行子  $e^{i\hat{L}t}$  の分解を意味する恒等式

$$(2.21) \quad e^{i\hat{L}t} = e^{i\hat{L}t} \mathbf{p}(t) + \int_0^t ds e^{i\hat{L}s} \mathbf{p}(s) (i\hat{L} - \dot{\mathbf{p}}(s)) (1 - \mathbf{p}(s)) G(s, t) + (1 - \mathbf{p}(0)) G(0, t)$$

$$(2.22) \quad G(s, t) = T_- e^{\int_s^t d\tau i\hat{L}(1 - \mathbf{p}(\tau))}$$

の成立は  $z(t) = e^{i\hat{L}t} (1 - \mathbf{p}(t))$  の微分方程式を書き下すことによって確かめられる。ここで作用素  $G(s, t)$  の表式における  $T_-$  は時間に依存する作用素を時間の大きい方から先に作用させる約束を意味する。この恒等式の重要性は、右辺第1, 第2項に見るように  $X_t = e^{i\hat{L}t} X$  を  $\psi_u(t) = e^{i\hat{L}t} \psi_u$  と  $\psi_u(s) = e^{i\hat{L}s} \psi_u$  の  $(0, t)$  における積分、および  $\psi_u(\cdot)$  に射影不可能な部分の和として表現していることにある。

さて (2.11) で定義した密度生成関数  $\psi_u(t)$  の時間微分

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_u(t) = e^{i\hat{L}t} i\hat{L} \psi_u$$

に上記分解を適用し、射影子  $\mathbf{p}$  の定義と性質 (2.13)~(2.15)(2.17),  $\dot{\mathbf{p}}$  の表式 (2.18), さらに  $\hat{\rho}$  の性質 (2.20) に留意して変形すれば

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_u(t) = & - \frac{\partial}{\partial u} V(u, t) \psi_u(t) \\ & + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t ds \int dv D(u, v, t, s) \frac{\partial}{\partial v} \psi_v(s) + (1 - \mathbf{p}(0)) G(0, t) i\hat{L} \psi_u \end{aligned}$$

となることが示される (Appendix A 参照)。ここに関数  $V, D$  は

$$(2.24) \quad V(u, t) = \text{tr}\{g(W, t) \psi_u \dot{U}\} = M(u) + \langle m(W) \rangle_t$$

$$(2.25) \quad \begin{aligned} D(u, v, t, s) = & \text{tr}\{g(W, s) (\dot{U} - V(u, s)) \psi_v G(s, t) (\dot{U} - V(u, t)) \psi_u\} \\ = & \text{tr}\{g(W, s) (m(W) - \langle m \rangle_s) \psi_v G(s, t) (m(W) - \langle m \rangle_t) \psi_u\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$\langle m(W) \rangle_t = \text{tr}\{g(W, t) \psi_u m(W)\} = \text{tr}\{\rho(t) m(W)\}$$

である。上記 (2.23) は力学的に言えば  $\psi_u(t)$  の運動方程式に他ならない。

次に、初期時刻  $t=0$  において真の確率密度は準確率密度に等しい、即ち

$$(2.26) \quad \rho(0) = \bar{\rho}(0) = f(U, 0) g(W, 0)$$

なる要請を置く。換言すると  $t < 0$  で適当な外力を変数  $U$  の過程に作用させて  $\rho$  に上記の構造を準備し、 $t \geq 0$  でこの仮想外力を除去する。この要請を満たす初期確率密度  $\rho(0)$  に対しては、 $\rho$  を  $\bar{\rho}$  に写す随伴射影子  $\hat{\rho}$  の性質 (2.19) によって

$$\text{tr}\{\rho(0) (1 - \mathbf{p}(0)) G(0, t) i\hat{L} \psi_u\} = \text{tr}\{(\rho(0) - \bar{\rho}(0)) G(0, t) i\hat{L} \psi_u\} = 0$$

となるから、 $\phi_u(t)$  の運動方程式 (2.23) において両辺の  $\rho(0)$  による期待値をとれば

$$(2.27) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(u, t) = - \frac{\partial}{\partial u} V(u, t) f(u, t) + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t ds \int dv D(u, v, t, s) \frac{\partial}{\partial v} f(v, s)$$

なる方程式が得られる。

この方程式は、初期条件  $f(u, 0)$  が指定されたとき  $t > 0$  における確率密度  $f(u, t)$  を定める Fokker-Planck 方程式の一種である。結合確率密度  $\rho(t)$  に対する全系の Fokker-Planck 方程式 (2.3) ではなく、 $f(u, t)$  のみを未知量として含む方程式を考える限り、通常の Fokker-Planck 方程式 (例えば Stratonovich (1963)) は一般の外乱  $W$  に対して近似的に成立するに過ぎず、外乱が正規白色過程の場合にだけ正確である (第 3 章参照)。スケーリング理論 (Suzuki (1982)) と変数変換に基づき正規白色過程以外の外乱への適用を特に目指した Valsakumar (1985) の方法も近似的結果に終わっている。これに対し上記方程式は、初期確率密度の構造に関する要請 (2.26) を置いた以外は、外乱の種類を限定せず、且つ何らの近似も施さずに導かれた厳密な方程式である。言い替えれば、Fokker-Planck 方程式の適用範囲を任意の外乱にまで広げたことになる。この意味でこれを一般化 Fokker-Planck (GFP) 方程式と呼ぶ。

GFP 方程式は  $f(u, t)$  の時間微分が  $u$  による 2 階微分で表現されている点で拡散方程式の範疇に入り、(2.27) 式の右辺第 1 項は  $V(u, t)$  を移流速度とする移流項に、第 2 項は  $D(u, v, t, s)$  を拡散係数とする拡散項に相当する。拡散項の存在は目的変数  $U$  と外乱  $W$  の相互作用に起因している。 $D$  に関する時間積分は  $f(u, t)$  単独では表し得ぬ結合確率密度  $\rho(t)$  の情報を  $t$  以前の時刻における  $f$  を介して表現するためである。

ここで、GFP 方程式と、物質の巨視的量の確率密度に対し統計力学の射影子法で導かれた一般化 Fokker-Planck 方程式 (例えば Grabert (1982), p. 53) とを比較すると、移流項、拡散項、共に同一の構造を有するが、但し拡散係数  $D(u, v, t, s)$  の表示が異なる。通常  $D(u, v, t, s)$  は  $t, s$  に関し対称であるに対し、(2.27) にあっては Fokker-Planck 作用素が  $-iLgX = gi\hat{L}$  を満たさないため、 $D(u, v, t, s)$  の対称性が成り立たない。尚、確率過程の解析に射影子法が使用された例としては、Bixon and Zwanzig (1971) による Duffing 振動子の研究がある。外乱を正規白色過程とし、従って容易に求められる方程式の定常解を準確率密度として射影子を構成し、振動子の平均変位と平均運動量を支配する方程式が導かれた。但し、この射影子は本論のように位相関数を  $\phi$  の空間に写すのではなく、位相関数を変位と運動量の空間に射影するものである。平均量を支配するこのような方程式は一般に輸送方程式と呼ばれる。輸送方程式は上述の GFP 方程式に射影子法を再度適用して導くこともできるが、本論では触れない。

外乱  $W$  が定常状態にあって確率密度  $g$  および射影子  $\mathbf{p}$  が時間に依存せず、

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(W, t) &= -iLg(W, t) = 0 \\ g(W, t) &= g(W), \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \end{aligned}$$

となる場合は、移流速度  $V(u, t)$  は  $u$  のみの関数であり、且つ一般性を失うことなく

$$(2.29) \quad \langle m(W) \rangle_t = \text{tr}\{g(W)\phi_u m(W)\} = \int dW g(W)m(W) = 0$$

と置き得るから、GFP 方程式の係数  $V, D$  は

$$(2.30) \quad V(u) = \text{tr}\{g(W)\phi_u \dot{U}\} = M(u)$$

$$(2.31) \quad D(u, v, t, s) = \text{tr}\{g(W)m(W)\phi_v e^{i\hat{L}(1-p)(t-s)}m(W)\phi_u\}$$

と表される。

### 3. GFP 方程式の相互作用展開

#### 3.1 緩変化の仮定に基づく GFP 方程式の近似表現

前章に導いた GFP 方程式は、要請 (2.26) が満たされていれば、確率微分方程式 (2.2) で記述される任意の外乱に対して成り立つ正確な方程式であるが、この方程式を実際に適用するにあたっては、移流速度  $V$  および拡散係数  $D$  の具体的な表現を求めておかなければならない。しかし、拡散係数は (2.25) 式に見るように Fokker-Planck 作用素の随伴  $i\hat{L}$  と射影子  $p$  から成る作用素  $G(s, t)$  に依存するため、一般の構造関数  $M(U)$ ,  $m(W)$ ,  $N(W)$  に対して厳密に計算することは不可能に近い。

そこで拡散係数  $D$  を近似的に求める手段が必要となる。本章ではこれを実現する 2 種の方法を試みる。初めに、緩変化に基づく近似法 (slow variation approximation; Stratonovich (1963)) を適用する。この方法は対象とする系の時間的変動に異なる時間スケールが存在するときに使われる。ここでは系  $U$  の時間変化が外乱  $W$  のそれよりも小さい、即ちオーダーの意味において

$$\dot{U} = M(U) + m(W) = i\hat{L}U \ll i\hat{L}W = N(W)$$

が成立する場合を考える。オーダー  $\dot{U}$  の位相関数  $X(U, W)$  に対しては

$$i\hat{L}(1-p(t))X\phi_u = i\hat{L}X\phi_u - \text{tr}\{g(W, t)\phi_u X\}i\hat{L}\phi_u = \phi_u i\hat{L}X + o(\dot{U}^2),$$

従って

$$T \cdot e^{\int_s^t dt i\hat{L}(1-p(\tau))} X\phi_u = \phi_u e^{i\hat{L}(t-s)} X + o(\dot{U}^2)$$

なる評価が許され、また  $T \cdot e^{\int_s^t dt i\hat{L}(1-p(\tau))} \phi_u = \phi_u$  であるから、 $X = m(W) - \langle m \rangle_t$  に対し作用素  $G(s, t)$  (2.22) は

$$G(s, t)(m(W) - \langle m(W) \rangle_t)\phi_u = \phi_u(m_{t-s}(W) - \langle m(W) \rangle_t) + o(\dot{U}^2)$$

を与える。このとき拡散係数 (2.25) は

$$\begin{aligned} D(u, v, t, s) &= \delta(u-v) \text{tr}\{g(W, s)(m - \langle m \rangle_s)(m_{t-s} - \langle m \rangle_t)\phi_u\} + o(\dot{U}^2) \\ &= \delta(u-v) \langle (m - \langle m \rangle_s)(m_{t-s} - \langle m \rangle_t) \rangle_s + o(\dot{U}^2) \end{aligned}$$

のように、外乱の関数  $m(W)$  の自己相関関数で表される(尚、この相関関数は作用素  $W(t) = e^{i\hat{L}t} W e^{-i\hat{L}t}$  を用いて  $\langle (m(W(s)) - \langle m \rangle_s)(m(W(t)) - \langle m \rangle_t) \cdot 1 \rangle_s$  とも表すことができる)。さらにこの相関関数は速やかに減衰し、その間、確率密度  $f(u, t)$  は殆ど変化しないものとして GFP 方程式の拡散項で  $\frac{\partial}{\partial v} f$  を時間積分の外に出し、次いで積分区間  $(0, t)$  を  $(0, \infty)$  に拡張する。さらに、系  $U$  の時間スケールで見るとき  $W$  の過程は常に定常に達していると考え、 $g(W, s) = g(W)$  とする。変数  $W$  の関数  $X$  の期待値を  $\langle X \rangle_s = \text{tr}\{g(W)\phi_u X(W)\} =$

$\int dW g(W) X(W) = \langle X \rangle$  と記せば, GFP 方程式はきわめて簡単な形をとる;

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} f = - \frac{\partial}{\partial u} V(u, t) f + D_{\text{slow}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 f.$$

ここに

$$(3.2) \quad D_{\text{slow}} = \int_0^\infty ds \langle (m(W) - \langle m(W) \rangle) (m_s(W) - \langle m(W) \rangle) \rangle$$

は近似拡散係数である。これは微分方程式 (2.1) で記述される確率過程で通常用いられる Fokker-Planck 方程式に他ならない。

緩変化近似によるこの方程式 (3.1) の精度を吟味するため,  $M = -\alpha U$ ,  $m = W$ ,  $N = -\beta W$  と置いた線形系

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{U} &= -\alpha U + W \\ \dot{W} &= -\beta W + n(t) \end{aligned}$$

を取り上げる。この場合は結合確率密度  $\rho$  に対する全系 Fokker-Planck 方程式 (2.3) の厳密解を容易に見出すことができ, 定常状態  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  の確率密度  $f = f(u)$  は

$$(3.4) \quad \begin{aligned} f_{\text{exact}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{exact}}} e^{-u^2/2\sigma_{\text{exact}}^2} \\ \sigma_{\text{exact}}^2 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

と表される。また, 外乱の定常確率密度  $g(W) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_\beta) \exp(-W^2/2\sigma_\beta^2)$  ( $\sigma_\beta^2 = \sigma^2/2\beta$ ) から  $m(W) = W$  の自己相関関数は

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \langle WW_t \rangle &= \int dW g(W) W e^{iL_t} W \\ &= \int dW g(W) W e^{(-\beta W D_W + (\sigma^2/2) D_W^2)t} W = \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta t} \end{aligned}$$

と計算されるから, 拡散係数は  $D_{\text{slow}} = \sigma^2/2\beta^2$  となり, 従って近似方程式 (3.1) とその定常解は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f &= \frac{\partial}{\partial u} \alpha u f + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 f \\ &\begin{cases} f_{\text{slow}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{slow}}} e^{-u^2/2\sigma_{\text{slow}}^2} \\ \sigma_{\text{slow}}^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha\beta^2} \end{cases} \end{aligned}$$

なる表現をもつ。この解は, 外乱の相関時間がきわめて短い極限 ( $\sigma/\beta$  一定の下で  $\beta \rightarrow \infty$ ) で初めて真の解 (3.4) と一致する。即ち緩変化の仮定に基づく近似法は, 無相関の外乱に対しては良好な結果を与えることが判る。

### 3.2 相互作用展開に基づく GFP 方程式の近似表現

前節に述べた緩変化近似が外乱無相関に近い緩変化でなければ良好な結果を与えないのは、変数  $U$  と外乱  $W$  との相互作用を十分に考慮せず、拡散係数の計算に際し外乱の時間変化のみを考え、確率密度  $f$  の時間変化を無視したからである。そこでより正確な拡散項の表現を求めするため、Fokker-Planck 作用素  $iL$  の相互作用項による  $f$  の展開を行う。以下では、定常な外乱 (2.28) に限定し、外乱項の平均  $\langle m(W) \rangle$ 、移流速度  $V = M(u)$ 、拡散係数  $D$  については (2.29)~(2.31) に拠って論を進める。まず、実数  $\varepsilon$  を導入して、随伴 Fokker-Planck 作用素  $i\hat{L}$  を

$$(3.7) \quad \begin{aligned} i\hat{L} &= i\hat{L}_U + i\hat{L}_W + \varepsilon m(W) D_U \\ i\hat{L}_U &= M(U) D_U \\ i\hat{L}_W &= N(W) D_W + \frac{\sigma^2}{2} D_W^2 \end{aligned}$$

と書き替える。作用素  $i\hat{L}_U$  は変数  $U$  のみに、 $i\hat{L}_W$  は  $W$  のみに関する作用素であるが、 $m(W) D_U$  は両者に関係し、 $U$  と  $W$  の相互作用を記述する。この書き替えに応じて定常外乱に対する GFP 方程式は

$$(3.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(u, t) = - \frac{\partial}{\partial u} M(u) f(u, t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t ds \int dv D_\varepsilon(u, v, s) \frac{\partial}{\partial v} f(v, t-s)$$

$$D_\varepsilon(u, v, t) = \text{tr} \{ g(W) m(W) \psi_v e^{(i\hat{L}_U + i\hat{L}_W + \varepsilon m(W) D_U)(1-\rho)t} m(W) \psi_u \}$$

となる。ここで拡散項に  $\varepsilon$  が付されるのは次の事情による。書き替え (3.7) に応じ  $i\hat{L}_U$ 、 $i\hat{L}_W$  とそれぞれ随伴の関係にある作用素  $iL_U$ 、 $iL_W$  を用いると、結合確率密度  $\rho$  の方程式は

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= (-iL_U - iL_W) \rho - \varepsilon D_U m(W) \rho \\ \begin{cases} -iL_U &= -D_U M(U) \\ -iL_W &= -D_W N(W) + \frac{\sigma^2}{2} D_W^2 \end{cases} \end{aligned}$$

と表されるが、これを  $W$  で積分し、(2.5) に注意すると

$$\frac{\partial}{\partial t} f(U, t) = -iL_U f(U, t) - \varepsilon \int dW D_U m(W) \rho(t)$$

が得られる。方程式 (3.8) の拡散項は上式の右辺第 2 項に対応し、従ってそれは  $\varepsilon$  のオーダーであることが判る。

さて展開

$$(3.10) \quad \begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\ D_\varepsilon &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \end{aligned}$$

を行うと、零次および 1 次の確率密度を定める方程式は

$$(3.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_0(u, t) = - \frac{\partial}{\partial u} M(u) f_0(u, t)$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_1(u, t) = -\frac{\partial}{\partial u} M(u) f_1(u, t) + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t ds \int dv D_0(u, v, s) \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t-s)$$

$$D_0(u, v, t) = \text{tr}\{g(W) m(W) \phi_v e^{(i\hat{L}_v + i\hat{L}_w)(1-p)t} m(W) \phi_u\}$$

と表される。

次に、確率密度  $f_1(u, t)$  に対する方程式 (3.12) の拡散項の一部

$$I = \int dv \text{tr}\{g(W) m(W) \phi_v e^{(i\hat{L}_v + i\hat{L}_w)(1-p)s} m(W) \phi_u\} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t-s)$$

の具体的表現を求める。作用素  $i\hat{L}_v, i\hat{L}_w$  はそれぞれ  $U, W$  のみに関する作用素であり、また外乱の定常性によって  $\mathbf{p}i\hat{L}_w = 0$  が成り立つから、作用素  $A, B$  の交換子を  $[A, B] = AB - BA$  と記すと

$$[i\hat{L}_v(1-p), i\hat{L}_w(1-p)] = 0,$$

即ち  $i\hat{L}_v(1-p)$  と  $i\hat{L}_w(1-p)$  は可換である (Appendix B 参照)。従って

$$e^{(i\hat{L}_v + i\hat{L}_w)(1-p)t} = e^{i\hat{L}_w(1-p)t} e^{i\hat{L}_v(1-p)t}$$

なる因数分解が許される。さらに、外乱の定常性に伴って  $\langle m(W) \rangle_t = 0$  (2.29) と設定してあるので

$$e^{i\hat{L}_v(1-p)t} m(W) \phi_u = m(W) e^{i\hat{L}_v t} \phi_u$$

が成り立つ (Appendix C 参照)。以上の 2 式から

$$(3.13) \quad I = \int dv \int dW g(W) m(W) e^{i\hat{L}_w s} m(W) \int dU (\phi_v e^{i\hat{L}_v s} \phi_u) \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t-s)$$

$$= \langle m(W) m_s(W) \rangle \int dU (e^{i\hat{L}_v s} \phi_u) D_U f_0(U, t-s)$$

$$= \langle m(W) m_s(W) \rangle \int dU \phi_u \hat{D}_U(s) f_0(U, t)$$

と変形される。ここで零次確率密度  $f_0(U, t) = f_0(u, t) |_{u=U}$  が方程式 (3.11) の解として

$$f_0(U, t) = e^{-i\hat{L}_v t} f_0(U, t-s)$$

と書かれることを用いた。また  $\hat{D}_U$  は

$$\hat{D}_U(t) = e^{-i\hat{L}_v t} D_U e^{i\hat{L}_v t}$$

なる作用素である。

作用素  $\hat{D}_U$  の性質を明らかにするため、新たな作用素

$$U(t) = e^{i\hat{L}_v t} U e^{-i\hat{L}_v t}$$

$$D_U(t) = e^{i\hat{L}_v t} D_U e^{-i\hat{L}_v t}$$

を準備すると、これらは微分方程式

$$(3.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t) = e^{iL_0 t} [i\hat{L}_U, U] e^{-iL_0 t} = M(U(t))$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} D_U(t) = e^{iL_0 t} [i\hat{L}_U, D_U] e^{-iL_0 t} = -M'(U(t)) D_U(t)$$

$$\left( M'(U) = \frac{dM(U)}{dU} \right)$$

を満足し、且つ初期条件

$$U(0) = U, \quad D_U(0) = D_U$$

に服している。従って  $U$  は単なる  $U$  の関数であり、目的変数  $U$  の過程を記述する確率微分方程式 (2.1) において外乱項  $m(W)$  を取り去った非確率的な方程式の解に他ならない。この解を用いて (3.15) を解けば微分作用素  $D_U$  の表示

$$(3.16) \quad D_U(t) = J(U, t) D_U$$

が得られる。ここに関数  $J$  は

$$(3.17) \quad J(U, t) = e^{-\int_0^t ds M'(U(s))}$$

を表すが、 $\frac{\partial}{\partial t} J(t)$  と方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial U(t)}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} M(U(t)) = M'(U(t)) \frac{\partial U(t)}{\partial U}$$

との比較から

$$J(U, t) = \left( \frac{\partial U(t)}{\partial U} \right)^{-1}$$

とも表現されるので、 $U$  と  $U(t)$  との間の Jacobian に他ならない。

さて、変数  $U$  のみに依存する任意の無限遠消失関数  $X(U)$ ,  $Y(U)$  ( $X, Y \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow \pm\infty$ ) に対して成り立つ関係  $\int dU X(U) \hat{D}_U(t) Y(U) = -\int dU Y(U) D_U(t) X(U)$  と  $D_U$  の表示 (3.16) から、直ちに微分作用素  $\hat{D}_U$  の表現

$$(3.18) \quad \hat{D}_U(t) = D_U J(U, -t)$$

を得る。この表式を (3.13) に代入すると、

$$I = \langle m(W) m_s(W) \rangle \frac{\partial}{\partial u} J(u, -s) f_0(u, t)$$

と表され、 $f_1$  を定める方程式はもはや形式的な作用素  $e^{(iL_U + iL_W)(1-p)t}$  を含まない。相互作用パラメータ  $\varepsilon$  の 2 乗のオーダーを無視し、 $f_1$  と  $f_0$  で  $f$  を復元すれば、相互作用展開による GFP 方程式の表現

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} f = -\frac{\partial}{\partial u} (M(u) - M_{\text{int}}(u, t)) f(u, t) + \frac{\partial}{\partial u} D_{\text{int}}(u, t) \frac{\partial}{\partial u} f(u, t)$$

に達する。ここに

$$(3.20) \quad M_{\text{int}}(u, t) = \int_0^t ds \langle m(W) m_s(W) \rangle \frac{\partial}{\partial u} J(u, -s)$$

$$(3.21) \quad D_{\text{int}}(u, t) = \int_0^t ds \langle m(W) m_s(W) \rangle J(u, -s)$$

はそれぞれ相互作用展開に伴う移流速度  $M(u)$  の修正分と拡散係数である。

この相互作用展開に基づく GFP 方程式の近似表現 (3.19) では、係数  $M_{\text{int}}$ ,  $D_{\text{int}}$  は目的変数の過程  $U(\cdot)$  から外乱の影響を除去した非確率的な過程  $U(\cdot)$  と外乱の過程  $W(\cdot)$  の知識から計算される。(3.21) 式が示すように拡散係数  $D_{\text{int}}$  は過程  $U(\cdot)$  の Jacobian  $J(u, -s)$  と外乱の相関関数  $\langle m(W) m_s(W) \rangle$  の相乗表現から成る。もともとの GFP 方程式 (2.27) で結合確率密度  $\rho$  の内容を  $f$  の履歴で表現した記憶積分の項はこの相互作用近似方程式には存在しないが、その代わり非確率的過程  $U(\cdot)$  の情報を用いて近似的に復元していることになる。この復元に伴い、移流速度  $V(u)$  もまた、外乱との相互作用効果を表す  $M_{\text{int}}$  によって修正を受けている。このように、外乱の相関関数が減衰する間の確率密度  $f$  の時間変化を取り入れている点で、前節に述べた緩変化近似に比べ近似の精度が向上していると考えられる。

相互作用近似方程式に期待されるこのような効果を確認するため、先に取り上げた線形系 (3.3) に適用する。非確率過程  $U(\cdot)$  の方程式とその解は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(t) &= M(U(t)) = -\alpha U(t), & U(0) &= U \\ U(t) &= e^{-\alpha t} U \end{aligned}$$

となり、過程  $U$  の Jacobian  $J$ , 移流速度の修正項  $M_{\text{int}}$ , および拡散係数  $D_{\text{int}}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} J(U, t) &= e^{\alpha t} \\ M_{\text{int}}(u, t) &= 0 \\ D_{\text{int}}(u, t) &= \int_0^t ds \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta s} J(u, -s) = \frac{\sigma^2}{2\beta(\alpha + \beta)} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \end{aligned}$$

と計算される。従って相互作用展開による方程式 (3.19) は

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial u} \alpha u f + \frac{\sigma^2}{2\beta(\alpha + \beta)} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 f$$

となり、定常解

$$\begin{aligned} f_{\text{int}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{int}}} e^{-u^2/2\sigma_{\text{int}}^2} = f_{\text{exact}} \\ \sigma_{\text{int}}^2 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha\beta(\alpha + \beta)} = \sigma_{\text{exact}}^2 \end{aligned}$$

を与える。この解はこの場合の厳密解 (3.4) そのものであり、相互作用近似は緩変化の仮定に基づく通常の近似 (3.6) と異なって、正しい結果をもたらすことが認められる。

#### 4. 終わりに

以上 2 章にわたり、射影子法による一般化 Fokker-Planck (GFP) 方程式の導出法と、その具体的表現の達成に至る経過を述べた。この方程式は目的変数の確率密度のみを未知数として

含むにもかかわらず、正規白色過程で駆動される任意の外乱に対して正確に成り立ち、通常の Fokker-Planck 方程式に比べて広い適用範囲をもつ。GFP 方程式のこの性質は、拡散項を構成する記憶積分によって結合確率密度のもつ情報が復元され、従って目的変数と外乱との相互作用が正しく考慮されていることに基づいている。

この方程式を実用に供するには、射影子を初めとする形式的作用素の存在が困難を来す恐れがあるが、しかし、この難題は外乱と目的変数との相互作用に関する展開を系統的に行うことで解決された。拡散係数に含まれる作用素の効果が、目的変数の発展を記述する確率微分方程式から外乱の影響を除去した非確率的な方程式の解と、外乱の相関関数とで表現されるからである。相関をもつ有色外乱で駆動される簡単なモデル過程に適用を試みた結果は、相互作用展開による方程式がまさに厳密解を与えることを示し、GFP 方程式の妥当性と実用上の有効性を保証している。

本論では目的変数、外乱、共に1変数としたが、多変数への拡張は単なる表記の変更に留まると思われる。またここで扱ったような付加的に加わる外乱ではなく、相乗的な外乱の考慮は GFP 方程式の構造にやや複雑な変更を招くことになるが、詳論は別の機会に譲る。

最後に、本稿執筆に着手する契機を与えて下さった船舶技術研究所の加藤俊司氏に御礼申し上げるとともに、数々の助言を賜った査読者に深く謝意を表する。

## Appendix A

### 密度生成関数 $\phi_u(t)$ の運動方程式

時間進行子  $e^{i\hat{L}t}$  の分解 (2.21) は

$$e^{i\hat{L}t} i\hat{L}\phi_u = e^{i\hat{L}t} \mathbf{p}(t) i\hat{L}\phi_u + \int_0^t ds e^{i\hat{L}s} \mathbf{p}(s) (i\hat{L} - \dot{\mathbf{p}}(s))(1 - \mathbf{p}(s)) G(s, t) i\hat{L}\phi_u + (1 - \mathbf{p}(0)) G(0, t) i\hat{L}\phi_u$$

を与える。右辺第1項に関しては

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) i\hat{L}\phi_u &= \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_v \dot{U} D_v \phi_u\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial u} \phi_u \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_u \dot{U}\} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \text{(A.1)} \quad \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_u \dot{U}\} &= \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_u (M(U) + m(W))\} \\ &= M(u) + \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_u m(W)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(A.2)} \quad \operatorname{tr}\{g(W, t) \phi_u m(W)\} &= \int dw g(w, t) m(w) = \int dw \operatorname{tr}\{\rho(t) \delta(W - w)\} m(w) \\ &= \operatorname{tr}\{\rho(t) m(W)\} = \langle m(W) \rangle_t \end{aligned}$$

であるから、本文 (2.23) 式右辺第1項および  $V(u, t)$  の表式 (2.24) を得る。

第2項については

$$F_u(s, t) = (1 - \mathbf{p}(s)) G(s, t) i\hat{L}\phi_u$$

と置き

$$\mathbf{p}(s)(i\hat{L}-\hat{\mathbf{p}}(s))F_u(s, t) = \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, s)\phi_v(i\hat{L}-\hat{\mathbf{p}}(s))F_u(s, t)\} \equiv K_1$$

を変形する。まず

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\{g(W, s)\phi_v i\hat{L}F_u(s, t)\} &= \operatorname{tr}\{[-iLg(W, s)\phi_v]F_u(s, t)\} \\ &= \operatorname{tr}\left\{g(W, s)(-iL\phi_v)F_u(s, t) + \frac{\partial g(W, s)}{\partial s} \phi_v F_u(s, t)\right\} \\ \operatorname{tr}\{g(W, s)\phi_v \hat{\mathbf{p}}(s)F_u(s, t)\} &= \operatorname{tr}\left\{g(W, s)\phi_v \int dx \phi_x \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial g(W, s)}{\partial s} \phi_x F_u(s, t)\right\}\right\} \\ &= \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial g(W, s)}{\partial s} \phi_v F_u(s, t)\right\} \end{aligned}$$

によって

$$K_1 = \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, s)(-iL\phi_v)F_u(s, t)\}$$

を得る。さらに  $F_u(s, t) = (1-\mathbf{p}(s))F_u(s, t)$  であるから

$$\begin{aligned} K_1 &= \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{[(1-\hat{\mathbf{p}}(s))g(W, s)(-iL\phi_v)]F_u(s, t)\} \\ &= \int dv \phi_v \operatorname{tr}\{g(W, s)[(1-\mathbf{p}(s))(-iL\phi_v)]F_u(s, t)\} \equiv K_2 \end{aligned}$$

と書かれる。ここで  $-iL\phi_v = -D_v \dot{U}\phi_v = -\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} \phi_v - \dot{U}D_v \phi_v$ , および  $(1-\mathbf{p}(s))\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} \phi_v = (1-\mathbf{p}(s))\frac{\partial M(U)}{\partial U} \phi_v = 0$  に留意すれば

$$\begin{aligned} K_2 &= \int dv \phi_v \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{tr}\{g(W, s)[(1-\mathbf{p}(s))\dot{U}\phi_v]F_u(s, t)\} \\ &= - \int dv \operatorname{tr}\{g(W, s)[(1-\mathbf{p}(s))\dot{U}\phi_v]F_u(s, t)\} \frac{\partial}{\partial v} \phi_v \equiv K_3 \end{aligned}$$

に達する。この  $\operatorname{tr}\{ \}$  の部分に

$$\begin{aligned} F_u(s, t) &= (1-\mathbf{p}(s))G(s, t)\dot{U}D_v \phi_u \\ &= (1-\mathbf{p}(s))G(s, t)(1-\mathbf{p}(t))\dot{U}D_v \phi_u = -\frac{\partial}{\partial u} (1-\mathbf{p}(s))G(s, t)(1-\mathbf{p}(t))\dot{U}\phi_u \end{aligned}$$

を代入すると、結局

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{\partial}{\partial u} \int dv \operatorname{tr}\{g(W, s)[(1-\mathbf{p}(s))\dot{U}\phi_v](1-\mathbf{p}(s))G(s, t)(1-\mathbf{p}(t))\dot{U}\phi_u\} \frac{\partial}{\partial v} \phi_v \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \int dv \operatorname{tr}\{g(W, s)[(1-\mathbf{p}(s))\dot{U}\phi_v]G(s, t)(1-\mathbf{p}(t))\dot{U}\phi_u\} \frac{\partial}{\partial v} \phi_v \end{aligned}$$

となる。(A.1), (A.2)により

$$\mathbf{p}(t)\dot{U}\phi_u = \operatorname{tr}\{g(W, t)\dot{U}\phi_u\}\phi_u = V(u, t)\phi_u$$

と表し,  $e^{i\hat{L}s}$  を作用させれば本文 (2.23) 式右辺第 2 項および拡散係数  $D(u, v, t, s)$  の表式

(2.25) を得る.

### Appendix B

$i\hat{L}_U(1-\mathbf{p})$  と  $i\hat{L}_W(1-\mathbf{p})$  の可換性

明らかに

$$[i\hat{L}_U, i\hat{L}_W]=0$$

であり, また任意の位相関数  $X$  に対し,  $\mathbf{p}X$  は  $U$  のみの関数であるから

$$i\hat{L}_W\mathbf{p}=0$$

となっている. さらに, 外乱の定常性  $-iLg(W)=-iLwg(W)=0$  ((2.28), (3.9)) により

$$\begin{aligned} \mathbf{p}i\hat{L}_W X &= \int du \phi_u \operatorname{tr}\{g(W)\phi_u i\hat{L}_W X\} \\ &= \int du \phi_u \operatorname{tr}\{(-iLwg(W))\phi_u X\}=0 \end{aligned}$$

である. 以上の関係から

$$[i\hat{L}_U(1-\mathbf{p}), i\hat{L}_W(1-\mathbf{p})]=[i\hat{L}_U(1-\mathbf{p}), i\hat{L}_W]=-i\hat{L}_U\mathbf{p}i\hat{L}_W=0$$

を得る.

### Appendix C

$e^{i\hat{L}_U(1-\mathbf{p})t} m(W)\phi_u$  について

ここでは定常外乱 (2.28) を考えているので, 変数  $U$  のみに依存する位相関数  $Y(U)$  に対しては

$$\begin{aligned} \mathbf{p}m(W)Y &= \int du \phi_u \operatorname{tr}\{g(W)\phi_u m(W)Y(U)\} \\ &= Y(U) \operatorname{tr}\{g(W)\phi_u m(W)\}=0 \end{aligned}$$

である ((2.29) による). 従って

$$i\hat{L}_U(1-\mathbf{p})m(W)Y(U)=m(W)i\hat{L}_U Y(U)$$

となる. 右辺の  $i\hat{L}_U Y(U)$  もまた  $U$  のみの関数であるから

$$e^{i\hat{L}_U(1-\mathbf{p})t} m(W)Y(U)=m(W)e^{i\hat{L}_U t} Y(U)$$

を得る.

### 参 考 文 献

- Bixon, M. and Zwanzig, R. (1971). Brownian motion of a nonlinear oscillator, *Statistical Physics*, **3**, 245-260.

- Grabert, H. (1982). *Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer, Berlin.
- Stratonovich, R.L. (1963). *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. 1, Gordon and Breach, New York.
- Suzuki, M. (1982). Universality and scaling law of long-time tails in multiplicative processes, *Progr. Theoret. Phys.*, **68**, 1917-1934.
- Valsakumar, M.C. (1985). Unstable state dynamics: Treatment of coloured noise, *Statistical Physics*, **39**, 347-365.

Generalization of Fokker-Planck Equations by Means  
of a Projection Operator Technique  
— A Study of Stochastic Processes Subject to Additive Noises —

Takashi Okasaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

An attempt is presented to generalize Fokker-Planck (FP) equations to be applicable to stochastic processes driven by arbitrary external noises. Except for Gaussian white noises, the ordinary FP equation fails to determine the probability density function (PDF) of the stochastic variables rigorously, because it has no term incorporating the detailed information of the noise process but a parameter related with the noise-correlation function. To lift this limitation, an approach is developed based on a projection operator technique devised originally in statistical mechanics.

The present approach starts with a specification of the equations that describe the evolutions of the main variable  $U$  and of the noise variable  $W$ ; the equation of  $U$  may additively contain functions nonlinear in  $W$ , and that of  $W$  is required to have driving forces specified by a Gaussian white process. The joint probability density function, obeying an exact whole-system FP equation associated with these equations, gives the PDF of the main variable  $U$  as the expectation of a delta function in  $U$ , which is here referred to as a density creator (DCR).

Through the PDF of the noise variable, an operator  $\mathbf{p}$  is constructed to project every phase function of  $(U, W)$  out onto a space of linear combinations of DCR's. An elaboration on the calculi involving the projection operator  $\mathbf{p}$  and the whole-system FP operator enables one to express the equation of motion of the DCR in terms of the DCR itself, thereby to obtain an accurate equation, e.g., "a generalized FP (GFP) equation", which governs the PDF of the main variable. The diffusion term in this generalized form includes a memory integral over the past history of the PDF to recover informations originally owned by the joint PDF. The GFP equation properly describes the interaction effects between the main variable and the noises.

While the GFP equation thus derived has a compact form, it may, in applications, show some difficulties due to the presence of complicated projection operators in the expression of the diffusion coefficient. To attain a tractable form of the GFP equation, the diffusion coefficient, and the PDF as well, are expanded with respect to the interaction term in the whole-system FP operator. The diffusion coefficient then turns out to be an integral of the noise-correlation function and of the Jacobian related with a non-stochastic process which obeys an equation the same as for the main variable, but with no noise term.

The GFP equation is applied, to confirm its validity, to a simple linear process driven by coloured noises. The resulting PDF indicates a precise coincidence with the exact one, in contrast with the poor result given by the ordinary FP equation.

---

Key words: Arbitrary noise, probability density function, diffusion coefficient, memory integral, interaction, expansion.