

参 考 文 献

- Tanabe, K. (1987). Complementarity-enforcing centered Newton method for mathematical programming: Global method, ISM Cooperative Research Report, 5, 118-144.
 Tanabe, K. (1988). Centered Newton method for mathematical programming, *System Modelling and Optimization* (eds. M. Iri and K. Yajima), 197-206, Springer, New York.
 田辺國士 (1989). 中心化ニュートン法, オペレーションズ・リサーチ, 34, 135-138.

統計基礎研究系

尺度混合分布の確率密度関数の漸近展開の誤差評価

清 水 良 一

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 X の尺度混合 $Y = \sigma X$ の分布関数 $F(x)$ を $N(0, 1)$ の分布関数 $\Phi(x)$ の周りで展開する問題を考える。ただし, σ は X と独立で, 1 の近傍で変動する確率変数であるとする。 $N(0, 1)$ の確率密度関数を ϕ とし, 簡単の為に k は 2 またはそれ以上の偶数とすると, $F(x)$ は

$$G_k(x) = \Phi(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j j!} H_{2j-1}(x) \cdot E(\sigma^2 - 1)^j \cdot \phi(x)$$

で近似され, その誤差は上限 $\Delta_k \equiv C_k \cdot \{E(\sigma^2 - 1)^k + E(\sigma^{-2} - 1)^k\}$ をもつ。すなわち, 任意の x に対して $|F(x) - G_k(x)| \leq \Delta_k$ である。ただし, H はエルミート多項式, C_k は k だけで決まる正の数である。しかし, 分布関数のこの近似は, いろいろな事象の確率を十分によく近似しているという保証を与えてくれる訳ではなく, とくに, 多変量の場合にはこの種の誤差評価では余り役に立つとは思われない。

いま, $f_+(\xi) \equiv \xi^{-1/2} \exp(-x^2 \xi^{-1}/2)$ を ξ の関数と見て, $\xi = 1$ の周りで $k-1$ 次の項まで展開する。 $(\xi-1)^j$ の係数は $H_{2j}(x) \cdot f_+(1)/2^j j!$ で与えられる。誤差項 $\delta_{+k}(\xi, x)$ は絶対可積分であり, その積分を $(\xi-1)^k, (\xi^{-1}-1)^k$, および $(\xi^{-1}-1)^{k+2}$ の一次式で評価することが出来る。任意の正の数 σ に対して $\phi(x/\sigma)/\sigma$ は $f_+(\xi)$ によって $\phi(x/\sigma)/\sigma = f_+(\sigma)/\sqrt{2\pi}$ と書けるので, $\phi(x/\sigma)/\sigma$ を $\phi(x)$ の周りで展開し, その誤差評価を得ることが出来る。このことから, 確率変数 Y の確率密度関数 $f(x) = E(\phi(x/\sigma)/\sigma)$ は $G_k(x)$ の導関数 $G'_k(x)$ によって十分によく近似されることが分かる。とくに, 任意のボレル集合 A に対して事象 $Y \in A$ の確率は $G'_k(x)$ の A 上の積分で近似され, その誤差は $C_k \cdot \{(\sigma^2 - 1)^k + (\sigma^{-2} - 1)^k + (\sigma^{-2} - 1)^{k+2}\}$ を越えない。確率密度を展開する方法は, X が多次元正規分布, Σ が単位行列 I の近くで変動する正定値確率行列の場合について $Y = \Sigma^{1/2} X$ の分布の漸近展開に拡張して使うことが出来るものと期待される。いまの場合, $F(x) - G_k(x)$ の符号変化が高々 $2K$ 回であることから, 上の誤差評価は $|F(x) - G_k(x)| \leq \Delta_k$ から容易に得られるのであるが, これを多変量の場合に拡張して使うことは, 少なくとも初等的な方法では出来そうもない。なお, $f_+(\xi)$ の代りに $f_-(\xi) \equiv f_+(1/\xi)$ を使うことによって, σ^2 を σ^{-2} で置き換えた展開も可能であり, 同様の上限が得られる。

 L_1 ノルムを用いた適合度検定について

安 芸 重 雄

Shepp (1982), Rice (1982), Johnson and Killeen (1983) 等によって, Brownian bridge の L_1 ノルムの分布が明らかになった。これらの結果により, $T_n = \int_0^1 |\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))| dF(x)$ という形の適合

度検定統計量が使える。\$T_n\$ の帰無仮説の下での漸近分布は、\$\int_0^1 |\beta(t)| dt\$ の分布である。ここで、\$\{\beta(t): 0 \le t \le 1\}\$ は Brownian bridge. 以上の事の簡単な紹介が、Shorack and Wellner (1986) にある。

この報告では、Brownian bridge ではなく Wiener 過程に収束するような確率過程に注目し、その \$L_1\$ ノルムによって適合度検定を考える。これらの統計量の帰無仮説の下での漸近分布は、\$\int_0^1 |W(t)| dt\$ の分布である。ここで、\$\{W(t): 0 \le t \le 1\}\$ は、標準 Wiener 過程である。\$\xi = \int_0^1 |W(t)| dt\$ と置く。Kac (1946) は \$\xi\$ の Laplace 変換を次のように与えた。

$$(1) \quad L(z) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \exp \{ -(\delta_j^{3/2} z)^{2/3} \},$$

ここで

$$P(y) = \frac{(2y)^{1/2}}{3} \left\{ J_{-1/3} \left(\frac{(2y)^{3/2}}{3} \right) + J_{1/3} \left(\frac{(2y)^{3/2}}{3} \right) \right\},$$

\$\delta_j\$ は \$P'(y)\$ の \$j\$ 番目の正根、

$$x_j = \frac{1 + 3 \int_0^{\delta_j} P(y) dy}{3 \delta_j P(\delta_j)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

(1) 式を反転して次の結果を導くことが出来る。

定理. \$\xi\$ の分布関数 \$G_\xi(\cdot)\$ は次のように書ける。

$$G_\xi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j G \left(\frac{x}{\delta_j^{3/2}}, \frac{2}{3} \right),$$

ここで

$$G(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \{ -V_\alpha(x, u) \} du,$$

$$V_\alpha(x, u) = x^{\alpha(1-\alpha)} \left\{ \frac{\sin \left(\alpha u + \frac{\pi}{2} K(\alpha) \right)}{\cos u} \right\}^{\alpha(1-\alpha)} \frac{\cos \left((\alpha-1)u + \frac{\pi}{2} K(\alpha) \right)}{\cos u},$$

$$K(\alpha) = 1 - |1 - \alpha|.$$

この証明のためには、Zolotarev (1964) の結果が本質的である。この定理の他に、\$\xi\$ の確率密度関数、パーセント点、尾部確率の評価等の結果を得た (Aki and Kashiwagi (1988)). 以下に適合度検定への応用例を挙げる。

例 1. (一般化された) 対称性の検定

Aki (1987) によって定義された確率過程 \$\{u_n(t): 0 \le t \le 1\}\$ に基づき、その \$L_1\$ ノルムによって、一般化された対称性の仮説を検定する。このとき、統計量は仮説の下で、\$\xi\$ へ法則収束する。

例 2. 経験過程のマルチンゲール項

\$\{F_\theta; \theta \in \Theta\}\$ を \$[0, 1]\$ 上の連続な分布関数からなる集合とする。いま、\$\theta_0 \in \Theta\$ が存在して、\$F_{\theta_0}\$ が \$[0, 1]\$ 上の一様分布であると仮定する。\$X_1, X_2, \dots, X_n\$ を \$F_{\theta_0}\$ に従う独立同分布の確率変数とし、\$F_n\$ をその経験分布関数とする。

$$W_n(t) = \sqrt{n} \left(F_n(t) - \int_0^t \frac{1 - F_n(s)}{1 - s} ds \right)$$

と置き、仮説 $\theta = \theta_0$ を検定するために、 $T_n = \int_0^1 |W_n(t)| dt$ と定義すると、Aki (1986) の結果により、仮説の下で、 T_n は ξ へ法則収束する。さらに、各 $\theta \in \Theta$ に対し、 F_θ が Aki (1986) の条件 A, B を満たすならば、 $\{T_n\}$ は Bahadur の意味の standard sequence になる。このとき、Marlow の定理 (Marcus and Shepp (1971) 参照) と Aki (1986) の結果から、 T_n の approximate Bahadur slope は $3b^2(\theta)$ で与えられることがわかる。ここで、

$$b(\theta) = \int_0^1 \left| F_\theta(t) - \int_0^t \frac{1 - F_\theta(s)}{1 - s} ds \right| dt$$

である。

参 考 文 献

- Aki, S. (1986). Some test statistics based on the martingale term of the empirical distribution function, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **38**, 1-21.
- Aki, S. (1987). On nonparametric tests for symmetry, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **39**, 457-472.
- Aki, S. and Kashiwagi, N. (1988). Asymptotic properties of some goodness-of-fit tests based on the L_1 -norm, Research Memo. No. 352, The Institute of Statistical Mathematics.
- Johnson, B. Mck. and Killeen, T. (1983). An explicit formula for the cdf of the L_1 norm of the Brownian bridge, *Ann. Probab.*, **11**, 807-808.
- Kac, M. (1946). On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**, 401-414.
- Marcus, M.B. and Shepp, L.A. (1971). Sample behavior of Gaussian processes, *Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 2, 423-442, Univ. of California Press, Berkeley.
- Rice, S.O. (1982). The integral of the absolute value of the pinned Wiener process, *Ann. Probab.*, **10**, 240-243.
- Shepp, L.A. (1982). On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process, *Ann. Probab.*, **10**, 234-239.
- Shorack, G.R. and Wellner, J.A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*, Wiley, New York.
- Zolotarev, V.M. (1964). On the representation of the stable laws by integrals, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, **71**, 46-50.

極値分布の漸近近似について

松 縄 規

連続型分布からの大きさ n の無作為標本に基づく k lower extremes の同時分布と、その近似分布の間の全変動の意味での一様近似について近似誤差の評価に関するいくつかの結果を得た。特に、誤差の上界に関し、その存在が予想されていたが、大きさが未知であった k/n の項に掛かる絶対定数の最良値を得た。

$X_{n,1} < X_{n,2} < \dots < X_{n,n}$ を pdf. $f(x)$, cdf. $F(x)$ を持つ連続型分布からの無作為標本に基づく順序統計量とする。 a, b を extended real numbers とし、区間 (a, b) を $f(x)$ の support とする。

$\mathbf{X}_k = (X_{n,1}, \dots, X_{n,k})$ を k lower extremes とすると、その pdf. は

$$p_n(\mathbf{x}_k) = \frac{n!}{(n-k)!} [1 - F(x_k)]^{n-k} \prod_{i=1}^k f(x_i) \quad (a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b)$$

で与えられる。ここに、 $\mathbf{x}_k = (x_1, \dots, x_k)$ を表わす。