渦の配置についての尤度解析

東京農工大学 高木隆司
統計数理研究所 種村正美

互いに平行で異なる速度で流れている2つの流体が接するところ，すなわち混合層の内部には，秩序を持った渦の列が形成される．混合層の厚さは下流にいくにしたがって増加するが，これは渦同士の合併が主な原因である．本研究では，渦同士に適当なポテンシャルエネルギーを仮定し，渦の合併，遠くの渦の効果等の効果は乱雑な攪乱と見なして，統計力学の基本概念を応用し，渦列の間隔分布 $P(\xi)$ に対して次式を得た．

$$P(\xi)=C\ \xi^{\beta}\exp\{-(\beta+1)\ \xi\},$$

$\beta=8.6$, C は定数．理論の中で行なった仮定をうらづけるために，渦列の発展の数値シミュレーションを行ない，渦の配置に対するいくつかの統計データを得た．その結果に対して尤度解析の手法を用いて，逆にポテンシャルを推定することを試みた．この手法は，2次元分布に対して開発されている従来のものに倣っているが，1次元上の乱雑な分布に適用するために今回新たに開発したものである．渦同士のポテンシャルに対する試行関数として，逆べき関数(soft core, $n\geqq 2$)，および log と exp を組み合わせた関数（very soft core）を仮定して尤度を求めたところ，ほとんどのデータで，$n=2$ の逆べき関数が選ばれた．ただし，$1<n<2$ の領域で尤度が最大になる可能性もある．いずれにしても，渦間隔の分布は，非常に柔らかいポテンシャルによる熱平衡分布と見なすことができる．

乱流およびブラウン運動の射影子法による定式化

統計数理研究所 岡崎卓

気体や固体など多数の粒子から成る系の巨視的な振舞いを微視的な力学から説明しようとする統計力学の諸手法の中で，射影子法は恐らく最も簡明な思想に基づき簡潔な表現を達成している方法である．すなわち，射影子法は微視的量を巨視的状態空間に射影することによって，平均運動量やエントロピー等の巨視的量の時間変化を直接巨視的量で表現する方法である．その端緒は輻射の量子論に始まると思われるが，その後適用範囲の拡大と方法の洗練が行なわれ，1982年には成書（Grabert (1982)）を見るに至った．

さて，射影子法は要するに多変数の力学を少変数の力学に縮約し，巨視的変数の方程式を与える手続きである．とすれば，乱流の定式化にも応用できるのではないか？ 周知のように，乱流理論に課せられた中心的課題の一つは，平均速度や相関関数等の統計量の時間的空間的分布を予測すること，言い替えれば統計量を支配する方程式を構築することであるが，乱流の統計量は階層構造を成すため，平均速度や分散など興味ある少数の統計量のみに関する閉じた方程式を見出すことが難しい．それ故，DIA はじめ各種の近似理論が提案され続けているわけであるが，多数（この場合無限個）の統計量を微視的量と見なし，着目する少数の統計量を巨視的量と考えその方程式を導く問題は，まさに射影子法の範疇に属するのではないか．標記講演はこのような視点のもとに平均速度 U と二次の速度相関テンソル H を定める閉じた方程式の構成の可能性について報告したものである．以下詳細を略して結論的事項を簡単に述べる．

連続の方程式と Navier-Stokes 式を出発点として，"仮の確率密度"や射影子など射影子法の道具を適宜用意すれば，一連の操作を経て U, H の時空間変化を定める連立方程式に達する．両式共に粘性項，対流項，および乱流応力項からなる．相関テンソル H に対する乱流応力項は過去の U, H に亘る時間積分を含むが，これは U, H 以外の統計量を排除したことによる情報の損失を補償するものである．この連立方程式は厳密であり，かつ各項の構造と物理的意味が明確であって Reynolds stress の平均速度による線形表現を得るにも便利であるが，しかし，そのままでは具体的表現が得られない．乱流応力項は射影子のほかに Navier-Stokes 式の解核を含むため，U, H の関数として具体的に表すには，ある意味で Navier-Stokes 式を直接解くのと変わらぬ手間を要するからであり，実用に供するには解核に対して何らかの近似を施すことが欠かせない．ここにこの方法の最大の難点がある．これを克服する若干の手段が考えられるが，その当否は今後明らかになるであろう．

なお，講演では表題のようにブラウン運動にも触れた．二変数のブラウン運動を一変数のブラウン運動に縮約する問題であって，流体運動方程式の代わりに Langevin 方程式を採り，平均速度や相関テンソルの代わりに一変数のみに関する確率密度関数を考えることと，仮の確率密度の構成法が異なることを除けば，上記乱流の定式化と殆ど変わらないが，Langevin 方程式に従う二変数の時間スケールの差を利用して容易に具体的な結果を得ることができる．

参 考 文 献

Grabert, H. (1982). *Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistical Mechanics,* Springer, Berlin.

乱流の相対拡散

名古屋工業大学 後 藤 俊 幸

乱流の一つの大きな特徴はその大きな輸送能力にあり，乱流の統計理論の目的の一つはそのような乱流輸送係数を計算することにある．その代表的なものは乱流拡散係数である．これまでの理論は大きくわけて二つあり，random process の理論と次元解析を用いて現象論的に流体粒子の分散を直接考える方法（微視的）と，Navier-Stokes 方程式に基づいた繰り込み展開によって分布関数を求める方法（巨視的）とがある．しかし，前者の微視的な立場においては，Navier-Stokes 方程式に基づいて解析された例はこれまでのところ見あたらない．

ところで，拡散は微視的に見た場合，拡散する粒子を追跡していくという意味で本質的に Lagrange 的な現象である．一方，流体の基礎方程式（Navier-Stokes）は Euler 的である．この点で Navier-Stokes 方程式の Lagrange 的な繰り込み展開による乱流統計理論は有効な方法であり，その一つである Lagrangian Renormalized Approximation (LRA, Kaneda (1981)) をこの問題に応用した．その結果，流体粒子の相対距離の分散が時間の 3 乗に比例するという Richardson の法則を定数までを含めて得ることができた．さらに Lagrange 的に乱流場を見た場合，ある大きさを持った流体粒子の変形の特性時間は，Lagrange 的速度場の非圧縮成分から圧縮成分への緩和時間で与えられることがわかった（Euler 的には速度場は非圧縮である）．従って従来の現象論，特に Langevin 方程式に現れる減衰項はこの緩和をあらわしているものと考えられる．