積分可能な力学系と幾何確率

伊 藤 栄 明

1. 保存量と幾何確率

次のような $2s+1$ 個の種についての生存競争の方程式を考える.

$$(1.1)\qquad \frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}\right),\qquad P_i=P_{i+2s+1},\ i=1,2,\ldots,2s+1.$$

この系は, $s+1$ 個の保存量を持つ（伊藤（1977）, Itoh（1987, 1988））.

$$\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}=\sum_{j=1}^{2s+1}a_{ij}P_j$$

とおくと, $a_{ij}+a_{ji}=0$ であり, a_{ij} は1, 0 あるいは−1の値をとる. $a_{ij}=1$ であるとき, i は j より強いということにすると, $2s+1$ 個の種の強弱関係は node の数が $2s+1$ である regular tournament になる. (1.1) 式における P_i は種 i の個体の比率であるとする. いま, $2r+1$ 個の個体を系からランダムに選びだすとする. それぞれの個体の属する種の間の強弱関係が $2r+1$ 個の node を持つ regular tournament になる確率を I_r とする. I_r, $r=0,1,2,\ldots,s$, は方程式（1.1）の保存量である.

次に

$$(1.2)\qquad \frac{d}{dt}P_i=P_i(P_{i-1}-P_{i+1})$$

$P_i=P_{i+n}$, $i=1,2,\ldots,n$, なる生存競争の方程式を考える. 隣り合う種 i と $i-1$ は隣接しているということにする. m 個の種があったときに, どの2つの種の組を考えても隣接していないときに m 個の種は互いに隣接していないということにする. 方程式（1.2）にしたがう系から m 個の個体を選びだしたときに, m 個の個体が属する種が互いに隣接していない m 個の種であるという確率を I_m とすると, I_m, $m=0,1,2,\ldots,[n/2]$, は保存量となる.

s を無限大にした極限として, 方程式（1.1）において i を連続変数 x にした

$$(1.3)\qquad \frac{d}{dt}P(x,t)=P(x,t)\left(\int_{x-\pi}^{x}P(y,t)dy-\int_{x}^{x+\pi}P(y,t)dy\right)$$

を, $P(x,t)=P(x+2\pi,t)$ のもとで考える. $\int_0^{2\pi}P(x,t)dx=1$ とすると $P(x,t)$, $0\leqq x<2\pi$, は単位円周上の確率密度である. 点 $A_1, A_2,\ldots,A_{2r+1}$ は互いに独立に同一の分布 $P(x,t)$ にしたがうものとする. A_i を通る直径により円周を2つの弧にわけたとき, それぞれに r 個ずつ点があるという事象を F_i とする. $I_r=P\left(\bigcap_{i=1}^{2r+1}F_i\right)$, $r=0,1,2,\ldots$, は保存量である.

2. 生存競争の系の保存量と Lax 形式

行列 p, b, m は n 次の正方行列であり, それぞれ次のような非零要素を持つものとする.

$$p_{i,i-l+1}=p_i,\qquad b_{i,i}=b_i,\qquad m_{i,i+1}=1$$

パラメーター E を持つ Lax 形式

$$(2.1)\qquad \frac{d}{dt}(p+Em)=[p+Em,\ b-Em^l]$$

を考える. ここで, $[A,B]\equiv AB-BA$ であるものとする. E^0 の係数, E^1 の係数を考えることにより

$$\frac{d}{dt}p=[p,\ b], \qquad \frac{d}{dt}m=[m,\ b]-[p,\ m^l]$$

を得る．容易にわかるように E^2 の係数は 0 である．$\frac{d}{dt}m=0$ であることにより

$$b_i=-\sum_{k=0}^{l-1}p_{i+k}$$

を得る．したがって，(2.1) 式は (1.1) 及び (1.2) 式を特殊な場合としてふくむ．

n 行 n 列の正方行列 L と A により $\frac{d}{dt}L=[L,\ A]$ なる Lax 形式を考える．このとき

$$\frac{d}{dt}L^k=[L^k,\ A]$$

であり，trace L^k は保存量であることがわかる．これより (2.1) 式の保存量を求めることができる．この議論を (1.3) 式におけるような連続の場合に拡張することもできる．第 1 節で述べた保存量は直観的にわかりやすい意味を持つ．本節で述べた方法は Bogoyavlensky (1988) によるものであり，より一般的な場合にも適用することができる．この方法で得られた保存量に直観的な意味を与えるのも興味ある課題であると思われる．

参 考 文 献

Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable discretizations of the KdV equation, *Phys. Lett. A*, **134**, 34-38.

伊藤栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質, *Seminar on Probability*, **44**, 141-146.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Progr. Theoret. Phys.*, **78**, 507-510.

Itoh, Y. (1988). Integrals of a Lotka-Volterra system of infinite species, *Progr. Theoret. Phys.*, **80**, 749-751.

乱流の粗視化

岡 崎　　卓

1. 粗視化速度の導入

複雑な速度変動を呈する流体運動の統計量が満たす方程式を見出すことは，乱流理論の中心課題であるが，求める統計量のみで閉じているという閉結性と，現在の解析的あるいは数値的手段で解き得る構造をもつという可解性を備えた方程式の構成は，運動方程式の非線型性に災いされ，乱流研究の長い歴史にもかかわらず，未だ十分な解決を見ていない．

先に平均速度と速度相関関数を定める閉じた方程式系を提案したが*，この方程式に含まれる時間進行作用素は，いわば運動方程式の解核に相当し，その値を求めることは複雑に発展する速度場そのものを追跡することと同義であり，非常に困難である．通常の繰り込み法による近似表現は可能であるが，多くの解析的近似理論と同様，可解性を欠く方程式が書き下されるにすぎない．

非可解性の原因が流体運動の忠実な追跡にあるならば，流体運動を大筋として追う見地に立てばよい．即ち，流体の各点での速度ではなく，微小領域の代表的速度によって乱流を把握するわけである．この代表速度は流体を大まかに眺めた場合の速度であるから，以下粗視化速度と呼ぶ．粗視化速度として，例えば実速度に誤差関数のフィルターをかけたものを採れば，その時間変動は実速度の変動に比べて緩い

* 1987 年秋 物理学会．