$$\frac{d}{dt}p=[p,\ b], \qquad \frac{d}{dt}m=[m,\ b]-[p,\ m^l]$$

を得る．容易にわかるように $E^2$ の係数は0である．$\frac{d}{dt}m=0$ であることにより

$$b_i=-\sum_{k=0}^{l-1}p_{i+k}$$

を得る．したがって，(2.1)式は(1.1)及び(1.2)式を特殊な場合としてふくむ．

$n$ 行 $n$ 列の正方行列 $L$ と $A$ により $\frac{d}{dt}L=[L,\ A]$ なるLax形式を考える．このとき

$$\frac{d}{dt}L^k=[L^k,\ A]$$

であり，trace $L^k$ は保存量であることがわかる．これより（2.1）式の保存量を求めることができる．この議論を（1.3）式におけるような連続の場合に拡張することもできる．第1節で述べた保存量は直観的にわかりやすい意味を持つ．本節で述べた方法はBogoyavlensky (1988) によるものであり，より一般的な場合にも適用することができる．この方法で得られた保存量に直観的な意味を与えるのも興味ある課題であると思われる．

## 参考文献

Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable discretizations of the KdV equation, *Phys. Lett. A*, **134**, 34-38.

伊藤栄明（1977）．種競合のモデルとその性質，*Seminar on Probability*, **44**, 141-146.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Progr. Theoret. Phys*., **78**, 507-510.

Itoh, Y. (1988). Integrals of a Lotka-Volterra system of infinite species, *Progr. Theoret. Phys*., **80**, 749-751.

# 乱流の粗視化

岡　崎　　　卓

## 1. 粗視化速度の導入

複雑な速度変動を呈する流体運動の統計量が満たす方程式を見出すことは，乱流理論の中心課題であるが，求める統計量のみで閉じているという閉結性と，現在の解析的あるいは数値的手段で解き得る構造をもつという可解性を備えた方程式の構成は，運動方程式の非線型性に災いされ，乱流研究の長い歴史にもかかわらず，未だ十分な解決を見ていない．

先に平均速度と速度相関関数を定める閉じた方程式系を提案したが*，この方程式に含まれる時間進行作用素は，いわば運動方程式の解核に相当し，その値を求めることは複雑に発展する速度場そのものを追跡することと同義であり，非常に困難である．通常の繰り込み法による近似表現は可能であるが，多くの解析的近似理論と同様，可解性を欠く方程式が書き下されるにすぎない．

非可解性の原因が流体運動の忠実な追跡にあるならば，流体運動を大筋として追う見地に立てばよい．即ち，流体の各点での速度ではなく，微小領域の代表的速度によって乱流を把握するわけである．この代表速度は流体を大まかに眺めた場合の速度であるから，以下粗視化速度と呼ぶ．粗視化速度として，例えば実速度に誤差関数のフィルターをかけたものを採れば，その時間変動は実速度の変動に比べて緩い

* 1987年秋 物理学会．

との仮定が許され，ブラウン運動と同様の理論展開が可能となる．

### 2.　粗視化速度の確率分布

粗視化速度を $A=A(v)$（ここでは実速度 $v$ から $A$ を得るフィルターの詳細は不問とする．尚，$A$ は勿論，時空間の関数である）とすれば，$A$ の確率密度 $P(\alpha)$ を定める方程式は，$v$ の確率分布を支配する Liouville 方程式と，$v$ の任意汎関数を $\delta(A(v)-\alpha)$ の線型空間に写す作用素とを用いて，広義の Fokker- Planck 方程式となることが示される．その拡散項はフィルターから漏れる微視的な力学相互作用の反映であるが，粗視化速度の時間変化が小さいとの仮定により拡散項中の時空間積分は消失して，$P(\alpha)$ は通常の Fokker-Planck 方程式に従うこととなる．

### 3.　平均速度と相関関数の方程式

次に粗視化速度の平均 $a$ と相関 $H\left(=\int d\alpha P(\alpha)\alpha\alpha\right)$ に対する方程式を求める．平均と相関は確率密度の部分情報にすぎないから上記 Fokker-Planck 方程式から直接には $a$, $H$ を定め得ない．"仮りの確率密度" $\overline{P}(\alpha)\sim e^{-(F_\beta(\alpha)-\mu\alpha-\lambda\alpha\alpha)}$ $(F_\beta(\alpha)=\ln P_\beta(\alpha)$, $P_\beta(\alpha)$ は定常状態の確率密度）と，$\alpha$ の任意関数を $\alpha$, $\alpha\alpha$ の線型空間に写す作用素を用意して射影子法を適用すれば，$a$, $H$ の時間微分を $\mu$, $\lambda$ で表現することができる；

$$\frac{\partial a}{\partial t}=mX(t)+\int_0^t ds\,\widehat{m}X(s),\qquad \left(\begin{array}{l}X=(\mu,\lambda)\\ m,\ldots,\widehat{M}\text{ は }a,\ H\text{ の関数}\end{array}\right).$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}=MX(t)+\int_0^t ds\,\widehat{M}X(s),$$

ここで"繰り込まれた"自由エネルギー $\overline{F}=\int d\alpha\,\overline{P}(\alpha)\ln\dfrac{\overline{P}(\alpha)}{P_\beta(\alpha)}$ の時間変化は $\dfrac{\partial F}{\partial t}=\dfrac{\partial a}{\partial t}\mu+\dfrac{\partial H}{\partial t}\lambda$ なることを示し得るから，$\mu$, $\lambda$ は $a$, $H$ の流れ（flux）を引き起す力（force）に当ることが判る．即ち，運動量の輸送や熱伝導，物質拡散等の輸送現象におけると同様の形式に $a$, $H$ の方程式が表現されたわけであり，乱流の解析を輸送現象に倣って進め得る可能性を示すものと考えられる．

## 分割表の周辺同等性の検定

安　楽　和　夫

左右の視力のように，対になった2つのものを同じ基準で測ることがある．この時，データは，一般に，$r\times r$ の正方分割表にまとめられる．今，セル確率を $p_{ij}$, $i$, $j=1,\ldots,r$, $p_{i+}=\sum_{j=1}^{r}p_{ij}$, $p_{+j}=\sum_{i=1}^{r}p_{ij}$, $p_{[k]+}=\sum_{i=1}^{k}p_{i+}$, $p_{+[l]}=\sum_{j=1}^{l}p_{+j}$ と置く．ただし，$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}p_{ij}=1$ とする．このような分割表の解析で最初に問題とされるのは，対称性：$p_{ij}=p_{ji}$, $i$, $j=1,\ldots,r$, であるかもしれないが，この条件は強過ぎて，検定すると多くの場合棄却されてしまう．対をなす2つのものの等質性を表す，もっとゆるやかな条件として，周辺分布の同等性がある．即ち，帰無仮説，$H$：$p_{i+}=p_{+i}$, $i=1,\ldots,r$, を検定する問題であり，対称性よりも現実的であろう．一方，対立仮説としては，順序制約のある対立仮説，$K$：$p_{[k]+}\geqq p_{+[k]}$, $k=1,\ldots,r$, あるいは，$p_{[k]+}\leqq p_{+[k]}$, $k=1,\ldots,r-1$ を考える．順序カテゴリカルデータを対象とする時，これは自然であろう．$n$ 個の標本に対する観測値を，同様に $n_{i+}$, $n_{+j}$, $n_{[k]+}$, $n_{+[l]}$ 等と表す．このような順序制約を反映した検定として，Agresti (1983) は Mann-Whitney 統計量

$$T_{MW}=\sum_{i<j}(n_{i+}n_{+j}-n_{+i}n_{j+})$$

に基づく両側検定を提唱した．今，$T_{MW}$ は