統計数理　第37巻　第1号（1989）

空間分割とフラクタル*

統計数理研究所・筑波大学 物理工学系　小　川　　泰

（1989年5月　受付）

1.　はじめに

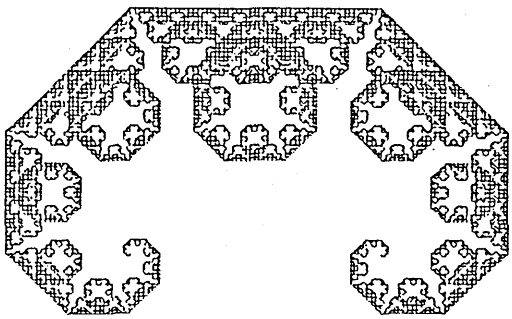
「形の物理学」（小川(1983)）などを通じて，広い意味での形の科学的な研究の重要性を主張している者として，フラクタルにも大いに関心をもっている．その意義についても的確な理解をもち，適切な位置づけを行ないたいと努めてもいる．しかしながら，いわば，遊びごころを大切にする研究態度をとっている身にとって，フラクタルというおもちゃも十分魅力的なものではあるが，すでに自分のおもちゃを楽しんでいる最中なので，無節操に乗り換えたりはしないというのが，わたしの姿勢である．そこで，既に世に多いフラクタルの専門家の仲間入りをしようというのではなく，むしろ，フラクタル理解のために自分の「遊び」の方へフラクタルを引き込む形で行なったいくつかの試みについて，特に，空間分割の観点から紹介する．なお，フラクタルについての筆者の基本的見解については，別稿（小川(1981, 1989 a)）を合わせてご覧頂ければ幸いである．

2.　対数らせん —— 自己相似性をあばく補助線

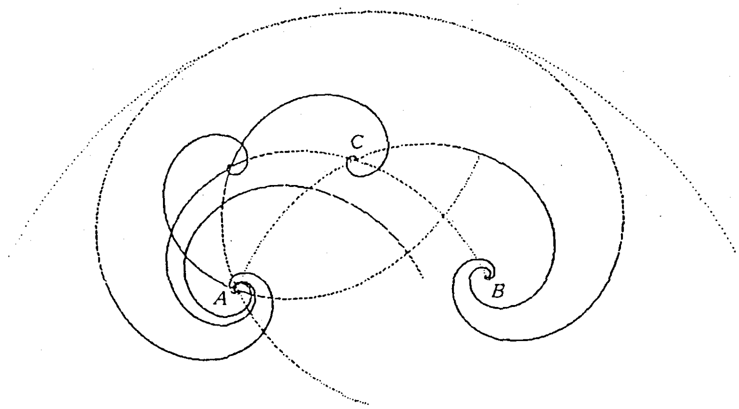
対数らせん $r(\theta)=\exp(\theta/\alpha)$ は，原点を相似の中心とする自己相似性をもっている．角度 α 回転する毎に原点からの距離が e 倍になるこのらせんは，相似に拡大しても，縮小しても，形を一定に保ったまま回転するだけである．しかし，フラクタル図形ではない．いわば，合わせ鏡と同様，自己相似の無限階層は整っているが，相似中心はただの一点である．相似中心の数が複数になったとたんに，それが無数に複製され，いわば，縮小作業の拡大再生産が起こりフラクタル性が現れる．対数らせんは中心以外では接線をもち，原点から曲線に沿って測った長さも有限な，まともな曲線である．しかし，回転しながら拡大や縮小をする，という自己相似性ゆえに，規則的につくったフラクタル図形のもつ自己相似性をあばく補助線になっている．補助線を記入しさえすれば本性があばき出されているので，野暮な説明は必要ない．図1(a)は，フラクタルという概念が提出されるよりもはるか昔にLévyが描いた手描き図が残っているというフラクタル図形である．図1 (b) のように A を中心にして45° 回転する毎に $\sqrt{2}$ 倍になるらせんを一つ描く．その上の一点 B を中心にして A を通るように，巻き方だけが異なるらせんを描く．それらは何回も交わるが，A, B から等距離にある交点を C とする．AB 間のすべてを，A を中心として AC 間に，そしてまた B を中心として CB 間に縮小複製するならば，いわば複利勘定で，縮小作業の拡大再生産が起こる．その極限が，Lévyの図形である．図1(c)のように対数らせんの記入によってこの図形の趣向が推測でき，解釈が可能となろう．

Koch曲線の場合は，底角30° の二等辺三角形の中に収まっているので，まず，二等辺三角形

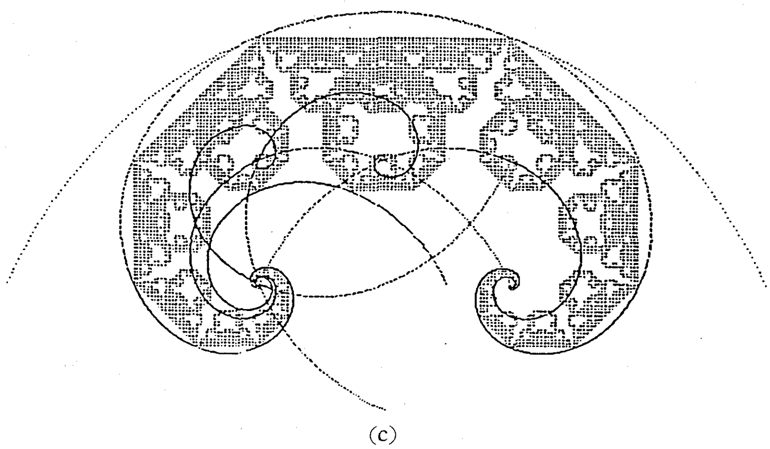
* 本稿は，統計数理研究所 共同研究（63-共会-51）における発表に基づくものである．



(a)

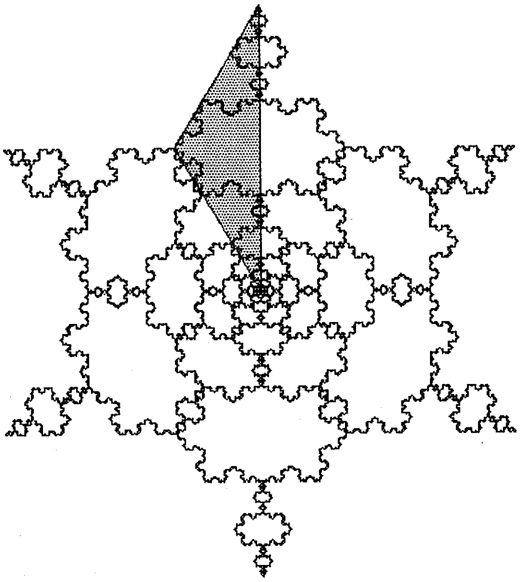


(b)

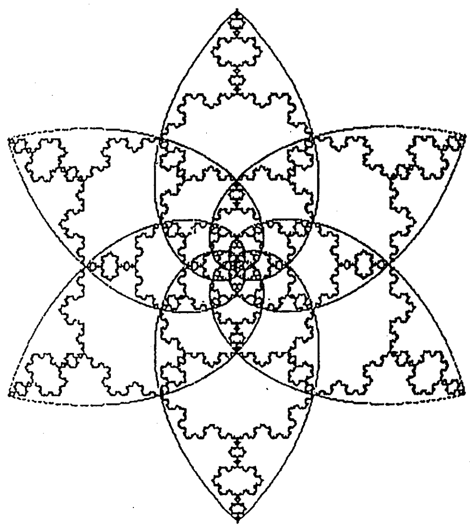


(c)

図1. (a) P. Lévy のフラクタル図形. (b) A を中心にして 45° 回転する毎に $\sqrt{2}$ 倍になるらせんを一つ描き, その上の一点 B を中心にして A を通るように, 巻き方だけが異なるらせんを描く. A, B から等距離にある交点を C とする. AB 間のすべてを, A を中心として AC 間に, そしてまた B を中心として CB 間に縮小複製する. その繰り返しででき上がる. (c) 両者を重ねて見れば, 趣向がよくわかる.



(a)



(b)

図2．　6弁花のタイル貼り：(a) 12個のKoch曲線を6回対称に配する．(b) 対数らせんを補助線として，タイルの形が単一であることがわかる．微細・巨大の両無限的な階層構造をもった自己相似性．

2個で菱形をつくり，さらに，6個の菱形を鋭角頂点を共有するように対称に配列したほうが，対数らせんの威力が見やすく，また，面白い．図2 (a) のように配した12個のKoch曲線は，大小無数のタイルからなるタイル貼りを構成している．図2 (b) には，30° 回転する毎に $\sqrt{3}$ 倍になるらせんを右巻き左巻き，それぞれ6本の中心を一致させて6弁の花のように記入してある．各花弁の重なりの形も花弁の形と相似になり，補助線から明らかなように，それぞれの中の対応するタイルに着目すると，大小のタイルはすべて相似形である．初めに用いたKoch曲線が有限の大きさのものなら，当然，6弁の花の大きさも有限であるが，無限に大きく相似に拡大することもでき，平面を単一形タイルによってタイル貼りしたことになる．曲線からタイルに相当する平面図形へ，さらに，図と地の関係，それらのあいだの相似性と，さまざまな観点から味わうことができる．

鈍角二等辺三角形の二つの斜辺の垂直二等分線が底辺と交わる2点を選び，それらを頂点とする一回り小さい相似二等辺三角形2個をつくる．二等辺三角形の底辺に相当する道を2斜辺で迂回するという過程によって，Koch曲線を理解するならば，底角は30° に限らない．この見方にたてば，任意の鈍角二等辺三角形に対してKoch曲線を拡張できる．底角が θ の場合のフラクタル次元 D は $\log 2/\log(2\cos\theta)$ であり，$0<\theta<45°$ に対して $1<D<2$ となる．そのうち，平面のタイル貼りと関係するのは，$\theta=36°$ の場合である．Shechtmann et al. (1984)がAl-Mn合金で発見した新しい非周期秩序である準結晶は，Penrose (1974)による無限平面の非周期タイル貼りがキー概念である．準結晶についての日本語による一般的な解説としては，小川(1986, 1987) があるが，正五角形，菱形，星形，舟形の4種をもちいたペンローズのタイル貼りの原型(図3)には，この底角36° の拡張Koch曲線が潜んでいる(太線部分)．底角30° の場合には，最短線分を有限長に保ったときに，大小すべてのタイルを最短線分を辺とする正三角形のみで埋めつくすことによって，いわゆる三角格子が得られるのに対して，図4(a)-(b)の底角36° の

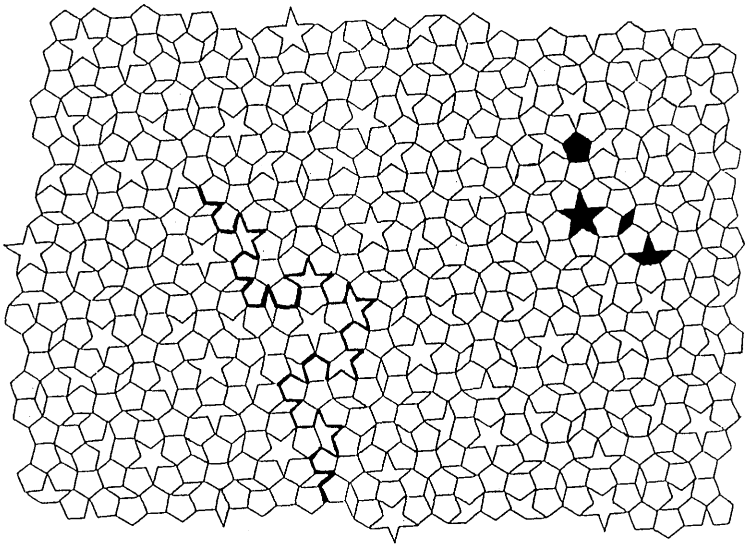


図3. Penroseのタイル貼り：正五角形，菱形，星形，舟形を使った(初版)．底角36°の拡張Koch曲線が潜んでいる．

場合には，大きさまでそろえて1種類にすることができず，ペンローズのタイル貼りに到達する．この場合には，36°回転する毎に黄金比 ($\tau=(1+\sqrt{5})/2=1.618$) 倍に相当する対数らせんの5弁の花が，よい補助線になる．

底角45°は，もちろん正方形のタイル貼り(正方格子)と関係し得るが，いわば迂回路どうしが重複して同じ道をなぞったような形になり，そのままではタイル貼りにはならない．しかし，ちょっと工夫すると，図5(a)-(b)のように平面を埋めつくす一筆描きであるPeano曲線となり，図と地が互いに相似になった反転図形が得られる．これは，正方格子を4個の同等な部分格子に分けて，その第一部分格子だけをまず採用し，次に，第一部分格子とは隣接しない第二部分格子をさらに4個の同等な部分格子に分けて，その第一部分格子だけを採用 … という操作を繰り返して，

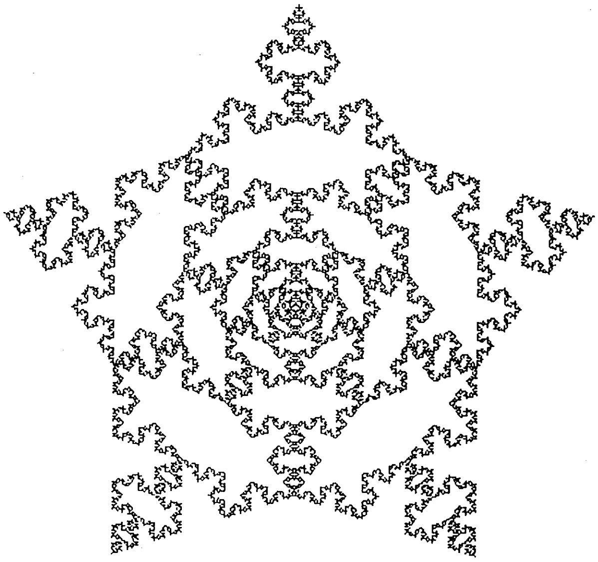
$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$$

という具合に，結局，全体の三分の一の格子点が採用される．したがって，図と地は(面積比で) 2:1となる．それらは同等で，相似比 $\sqrt{2}$ で相似である．図5 (b) で見ると，縦横の白の格子と斜めの黒の格子が，たくみに譲りあって共存している．このような図と地が互いに相似になった反転図形は，途中の段階には存在する差異を，無限小で解消してしまうフラクタルの威力といえよう．Escherがこの手を知っていたら，作品に生かしてくれたに違いない．

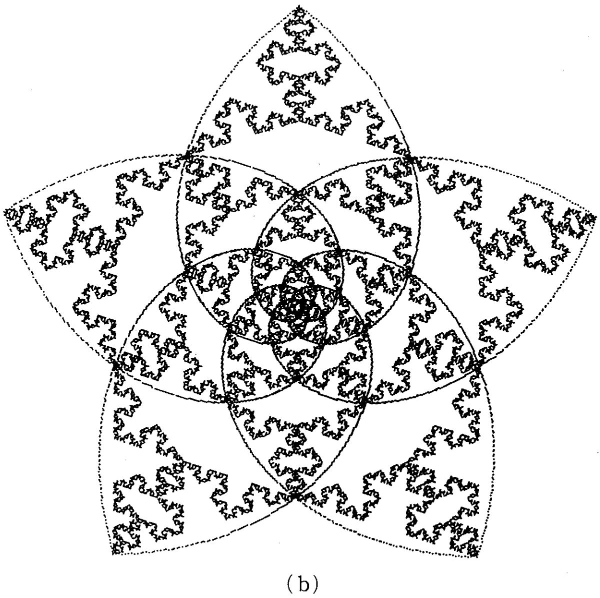
三角格子で，同様の試みをすると，

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{2}$$

となって，図と地が合同なフラクタル分割が図6のように得られる．ただし，この場合には，常に3個の同等な部分格子に分ける．また，残りの部分格子のいずれを採用するかによって，右巻き，左巻きの自由度が各段階にある．最後に記した三角格子の構造および考え方は，Shinjo



(a)



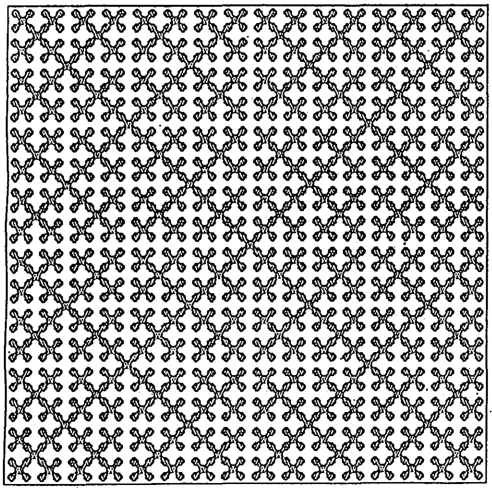
(b)

図4．　5弁花のタイル貼り：10個の拡張Koch曲線を5回対称に配する（図2と同様）．

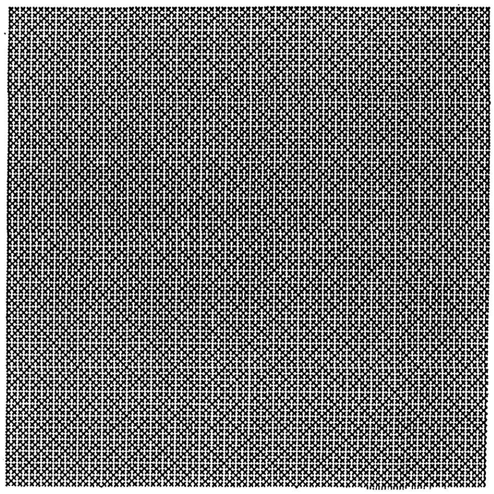
et al.（1986）が求め，電子状態などを計算した構造と同じである．

3．　球面上のフラクタル図形

空間内の点配置を特徴づけるVoronoï分割という方法がある（例えば，小川（1982）；長谷川・種村（1986）による一般的な解説）．いわば各点の縄張りに相当する凸包に空間を分割するのである．平面の場合には凸多角形分割，三次元空間の場合なら凸多面体分割となる．点配置の



(a)



(b)

図5. フラクタルな相似平面分割:(a) 底角45°の拡張Koch曲線の往路復路を分離し，工夫したPeano閉曲線で内外に分割．正方格子の部分格子分けから理解することもできる．
(b) もっと広い領域を見ると，斜めの黒い格子と縦横の白い格子(格子定数が$\sqrt{2}$倍)とがたくみに譲り合って共存していることがわかる．

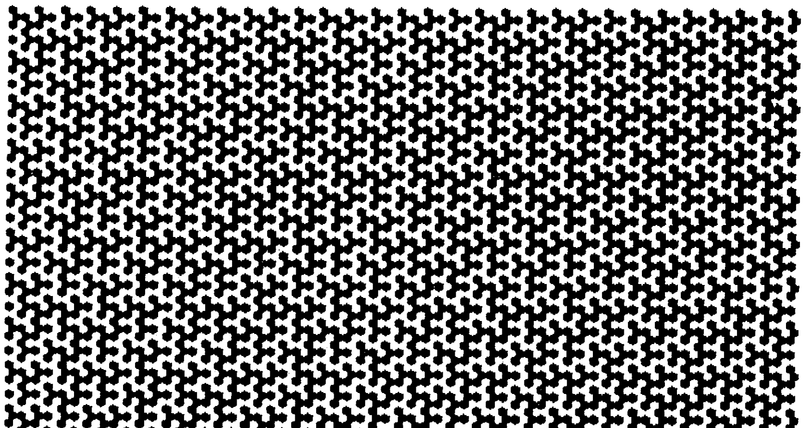


図6. フラクタルな合同平面分割(自己反転図形):三角格子の部分格子分けから．

特徴は，これらのVoronoï領域の形態や大きさの分布に反映する．その分布に含まれる特徴を正確に読み取るには，多面体の分類が必要である．これが，私個人にとっての"形"の問題の原点と言ってもよい．多面体，特に凸多面体は，球面分割と密接に関係している．フラクタルの概念の導入によって，第2節に述べたような新趣向の平面タイル貼りが得られ，平面分割の常識が変えられるとすれば，「球面分割の常識はどう改めるべきか」という問題は前節の問題意識の延長として，わたしにとってはごく自然な発想である．

さて，同様の趣向が球面上でも成り立つかといえば，まず第一に，平面と違って球面は有限である．平面の場合のような，巨視と微視との双方への無限階層性という，両無限的なフラク

タルは，そもそも球面上ではあり得ない．第二に，球面三角形の内角の和は，平面三角形の場合とは違って，一定値ではない．つまり，当然曲率をもっていて，ユークリッド空間・線形空間ではない球面の上では，相似の概念は存在しない．もちろん，拡張は可能だが，拡張方法は一意ではない．

第2節で述べた二等辺三角形に基づいて拡張したKoch曲線の定義にならい，ここでは球面上のKoch曲線を次のように定義しよう．球面上で直線に対応するものは大円である．やはり，球面二等辺三角形の底辺上に2点を選ぶわけだが，第2節での斜辺の垂直二等分線に対応するものは，垂直二等分大円である．選んだ2点を次世代の頂点として，それぞれ対応する前の斜辺を底辺とする球面二等辺三角形をつくる．このとき，底角の大きさは保たれるが，頂角の大きさは保たれない．球面三角形の内角和が一定ではない効果を，いつも頂角に担わせるのが，今の方針である．これにより，新しい頂点は常に一世代前の球面二等辺三角形の底辺上にできる．この事実から，Koch曲線から無限個によるタイル貼りへの転換が保証されるのである．

いくつかの球面Koch曲線によって，球面全体をちょうどうまくタイル貼りするには，点群的な対称性をもって球面を規則分割するように，うまい球面二等辺三角形から始める必要がある．フラクタルといえども球面に収まるには球面の掟に従わねばならない．ここでは，正12-20面体的な群 I_h の対称性の場合と，立方体的な群 O_h の対称性の場合を図7および図8に示す．前者は，3内角がそれぞれ（36°，36°，120°）の球面二等辺三角形60個から，つまり，菱面30面体の各菱形面を長い方の対角線で二等辺三角形化したもの，と言ったら，おわかり頂けようか．後者は，3内角がそれぞれ（45°，45°，120°）の球面二等辺三角形24個（菱面12面体の各菱形面を長い方の対角線で二等辺三角形化したもの）から始める．

いずれの場合も，第2節のKoch曲線を利用した平面タイル貼り同様，大小無数のタイルを動員して球面を埋めている．それらの形態は，微細の極限では互いに相似であるが，有限の大き

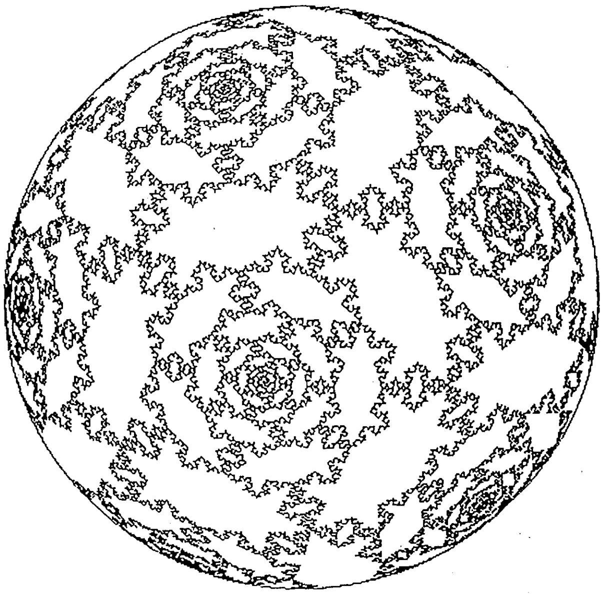


図7．球面の自己相似タイル貼りI：球面上の相似もどき，球面Koch曲線を定義し，図2および図4の要領でタイル貼り化する．球面に収めるためには，球面の掟にしたがわねばならない．当然，両無限的な階層構造はもち得ない．これは正20面体的な対称性の場合．

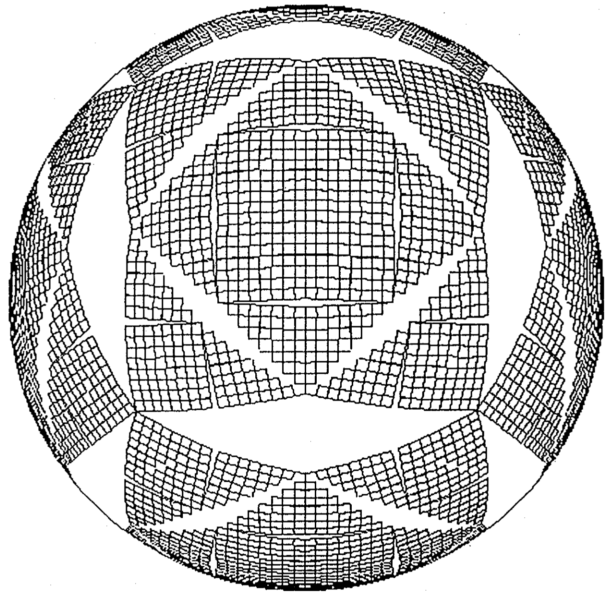


図 8．球面の自己相似タイル貼り II：同じく立方体的な対称性の場合．

さでは，厳密な相似ではなく，いわば，相似もどきである．これは，曲率のある空間の宿命と言うべきである．

4．有限個のフラクタル・タイルでの球面分割

第 3 節では，大小無数のタイルを動員して球面をフラクタル的に埋めたが，図 9 では，大：6 個，小：12 個のフラクタル的な輪郭をもった 2 種類のタイルで球面をタイル貼りしつくす．大小のタイルは，もちろん完全な相似ではあり得ないが前と同じ考え方で，でき得る限り，相似に近づけたものである．

全体は，立方体的な O_h の対称性をもっている．立方体の 6 面の中心は，4 回対称軸が貫いている．12 個の稜の中点は，2 回対称軸が通っている．しばらく擬人的に表現するならば，2 回対称軸は 4 回対称軸をまねようとする．もちろん，そこに正方形を貼るとか，正方形的な領域をつくることはできても，その外部の環境が違うので，本当の 4 回対称となり得ないことは，群論的にも明らかである．2 回対称の位置に正方形的な領域がつくられると，正真正銘の 4 回対称の方では，4 回対称性は保っているものの，もはや，本家の正方形域は四方から侵食されて，凹八角形というか，十字星型に変形している．2 回対称の方では，ワンテンポ遅れてそれをまね，前につくった正方形的な領域を十字星型に修正する．このとき，前に侵略した領域の一部を返還する．それによって今度は，4 回側が太る変形をし，それを 2 回側がまたまねる．… ということを繰り返すうち，侵略・返還の規模はしだいに縮小していくので，やがて収束する．フラクタル的な十字手裏剣のような，また，宇宙戦争をも連想させる図は，こうしてでき上がった．やはり，球面二等辺三角形内に一回り小さい球面二等辺三角形をつくっていくが，過剰の内角は，頂角だけに押しつけず，底角にも比例した分担をさせているために，細かいタイルは発生せず，有限個によるフラクタル的な球面タイル貼りとなる．

同様の趣向が平面の篭目格子の場合に成り立つ．篭目格子は，正六角形のセルと正三角形の

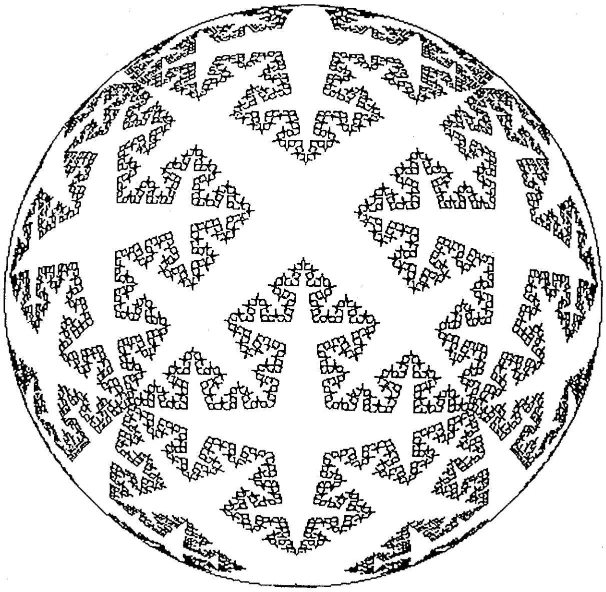


図 9. 球面の自己相似タイル貼り III：大：6 個 小：12 個の同形タイルで立方体的な対称性をもたせて.

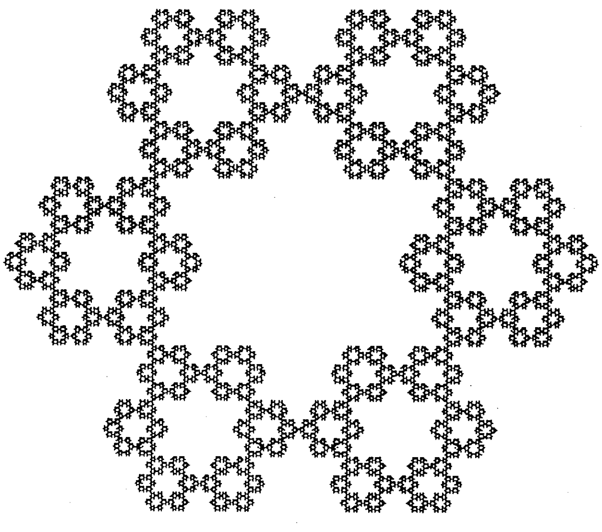


図 10. フラクタルな雪.

セルとから成るので，正三角形を正六角形化すると正六角形はダビデの星の輪郭のような星形に，さらに，それを追いかけて…，という具合に繰り返すと，大小 2 種類の Koch 島による周期的タイル貼りが得られる．篭目格子からではなく，ダビデの星から出発すると，図 10 のフラクタル構造をもった雪が得られる．輪郭は Koch 曲線である．Koch 曲線を雪片曲線と呼ぶことがあるらしいが，輪郭に留まらず構造自体もフラクタル的な階層性をもつ．

この作図プロセスは，Koch 曲線についての一つの解釈・理解を与える．境界線の両側の力

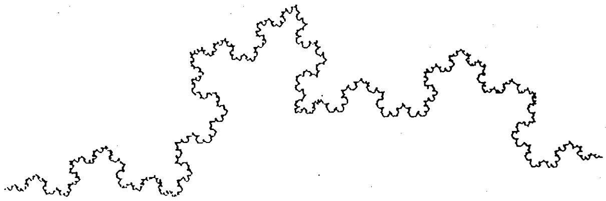


図11. ランダムKoch曲線（フラクタル次元は1.26）.

関係が偏って，一方が侵食し，他方が盛り返す．その繰り返しの極限である．線の変形として見る一番普及している見方の外に，二等辺三角形で見る第3節の見方，二つの領域の境界として見るここでの見方等その外にもいろいろとあろう．フラクタル次元という量や概念も重要だが，フラクタルということばで表現されていることの内容や解釈・理解方法等，また，フラクタル以前の幾何学的あるいは図形的な概念の修正等，フラクタルに関連してなすべきことは多い．当分，遊びの種は尽きそうもない．最後に，図11に示すのは，確率的な要素を取り入れたKoch曲線である．Koch曲線の欠点は，いかにも人工的な感じである．とすると，その欠点を補う第一のパラメーターは分布幅である．図11は，各段階で，底角30°のKoch曲線と同じ長さになるように，両端を焦点とする楕円の周上に点を取って迂回路を設けてつくったものである．

5. おわりに

フラクタルの概念が，きわめて重要なことは間違いない．最近の，パターン形成の問題や，形の科学への強い関心も，フラクタルを抜きにしては考えられないし，それ以上に，数百年の尺度での科学の思想面の変革をもたらす可能性をもってもいる．だからこそ，なおさら指摘しておく必要を感じるのは，「フラクタルにとらわれすぎるな」ということである．とらわれすぎることによって，かえって，フラクタルのもっている可能性を矮小化してしまうという危険性と，他の工夫を怠ってフラクタルだけで満足してしまうという危険性ということである．もしも，フラクタルという目を持っていなかったら，どういう見方を工夫していただろうか？ いまの問題には，フラクタルが本当に最善の見方なのか？という反省が常に必要であろう．

さまざまな現実の問題，特に，理想的ではない現象の観測手段として，フラクタルのアイディアをいかにして生かしていくか？ これも大きな課題である．

また，フラクタルという言葉の内容をもっとはっきりさせていく必要を感じる．例えば，相転移の臨界状態のもつフラクタル性ということについて，もっと内容をはっきりと表現し，認識を深めることが必要であろう．現在試みている理想臨界パターンについては別稿（小川(1989b)）に述べる．

参考文献

長谷川政美，種村正美（1986）．なわばりの生態学：生態のモデルと空間パターンの統計，動物その適応戦略と社会1（寺本 英 他 編），76-89，東海大学出版会，東京．

小川 泰（1981）．自然界の形とフラクタル，特集：非整数次元で見る自然，数理科学，No. **221**, 39-44.（別冊「数理科学」形・フラクタル（1986），94-100．にも掲載されている.）

小川 泰（1982）．空間内の点配置をどう特徴づけるか，特集：アモルファス（構造のトポロジー的な特徴），数理科学，No. **231**, 7-21.

小川　泰（1983）．形の物理学：科学研究のあり方を考える，モナド・ブックス 19，海鳴社，東京．
小川　泰（1986）．5 回対称を示す秩序構造模型，サイエンス，**16** (9), 10-23.
小川　泰（1987）．準結晶と黄金比，かたちの科学（小川　泰・宮崎興二 編），67-88，朝倉書店，東京．
小川　泰（1989a）．フラクタルとは何か，岩波 NEW SCIENCE AGE，岩波書店，東京．
小川　泰（1989b）．パターン形成における空間の役割，数理地震学 IV（斎藤正徳 編），統計数理研究所，東京．
Penrose, R. (1974). The role of aesthetics in pure and applied mathematical research, *J. Inst. Math., and Its Appl.*, **12**, 266-271.
Shechtmann, D., Blech, I., Gratias, D. and Cahn, J.W. (1984). Metallic phase with long-ranged orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1951-1953.
Shinjo, K., Sasada, T. and Sugano, S. (1986). Quasicrystalline structure in two dimensions: Structural and physical properties, *Phys. Rev. B*, **34**, 391-404.

Tessellation and Fractal

Tohru Ogawa

(The Institute of Statistical Mathematics;
Institute of Applied Physics, University of Tsukuba)

The aim of this study is a contribution to science of form as a part of which fractal is included. From the viewpoint of tessellation or space division, which has been investigated since before, fractal is viewed. For example, a topological classification of polyhedra is an important problem in the Voronoï analysis. This problem has been regarded as equivalent to the classification of tessellation of a spherical surface with convex elements. By the appearance of the concept of fractal, this point of view might have to be modified. The motivation of this study is based on such an idea.

The concept of tessellation is introduced into fractal geometry in this paper. Several attempts of self-similar or semi-self-similar tessellation are made. Some of them have similarity between figure and ground. The concept of similarity is extended for figures on a spherical surface. Two types of fractal tessellations of a spherical surface are proposed: In the first type of them, infinitely many *similar* tiles with infinitely many kinds of size are used. In the second type, finite number of tiles with two kinds of size are used.

First, as a preparation for the above mentioned attempts, a generalized Koch curve is defined by the following process. Prepare an arbitrary isosceles triangle ABC, where the side BC is the base. Choose two points D and E on the base so that D is in the same distance from A and B and so that E is the same distance from A and C. Next, it is shown that some generalized Koch curves are regarded as tile edge of hierarchical tiling of a plane. The definition of a generalized Koch curve is further extended for spherical isoscele triangles.

It is also shown that some logarithmic spirals reveal the elementary process of construction and the characteristic feature, self-similarity or fractal structure, for many regular fractal patterns.

Key words: Fractal, tessellation, tiling, similarity between figure and ground.