統計数理　第37巻　第2号（1989）

公開講演会要旨

マーコビッツ・モデルとその改良

東京工業大学 工学部　今　野　　浩

（平成元年11月1日，統計数理研究所 講堂）

いま n 種の投資対象 S_j $(j=1, \ldots, n)$ があるものとし，S_j の単位期間あたりの収益率を R_j としよう．すると，投資家が S_j に x_j 円を投資するポートフォリオから得られる収益は

$$R(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} R_j x_j$$

と表わされる．R_jは一定の分布にしたがう確率変数である．マーコビッツ（Markowitz (1959)）は投資に伴うリスクの指数として $R(x_1, \ldots, x_n)$ の標準偏差を採用し，ポートフォリオ選択問題を

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \sqrt{V[R(x_1, \ldots, x_n)]} \\ \text{条　件} & E[R(x_1, \ldots, x_n)] \geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M, \quad x_j \geqq 0, \quad j=1, \ldots, n \end{array}$$

と定式化した．ここで，M は投資家の投資金額，r_0 は投資家が要求する最小の平均収益率，そして $E[\cdot]$, $V[\cdot]$ はそれぞれカッコ内の確率変動の平均と分散を表わす記号である．

R_j の平均を r_j, R_j と R_k の共分散をσ_{jk} とすると，問題 (1) は次の2次計画問題：

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M, \quad x_j \geqq 0, \quad j=1, \ldots, n \end{array}$$

と等価である．

マーコビッツがこのような形に問題を定式化したのは，いまから約40年前の1952年のことであった．ところが，良く知られている割には，このモデルは最近まであまり本格的には利用されなかったようである．その第1の理由は，株の将来の平均収益率や共分散を予測するのに手間がかかることである．そこで，通常は過去の時系列データからこれを推定してやるわけだが，仮にそうやったとしても，$n \geqq 1{,}000$ といった大型の2次計画問題は手軽に解けないことが，実用上のネックとなっていた．このあたりは，最近かなりの改善が見られるが，実務家の心理的負担は依然として大きいようである．

そこで筆者らは，マーコビッツ・モデルの利点を生かし欠点を補う改良マーコビッツ・モデルを提唱している．そこでそれについて述べる前に，マーコビッツ・モデルの技術的な問題点をもう2つ指摘しておこう．

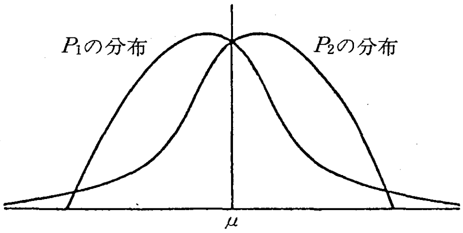

図 1.

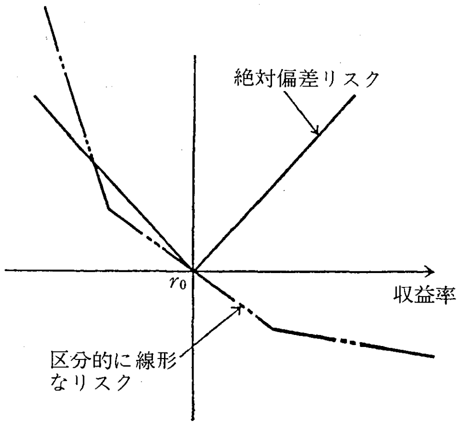

図 2.

(a)　投資のリスクを収益の標準偏差で表わすことは果して妥当か？　たとえば，図1のように収益率の平均と分散が全く同じ2つのポートフォリオ P_1, P_2 を比べると，誰でも P_2 より P_1 の方を好むはずだが，マーコビッツ・モデルではこの両者を区別できない．

(b)　問題 (2) を解いた結果，多数の銘柄に少額ずつ分散投資するのが良いことがわかったとする．ところが，実際にそのとおりやろうとすると，取引コストがかさむうえに取引の最小単位以下の端数処理が厄介である．

さて，改良マーコビッツ・モデルのポイントは，投資のリスク指標として，収益の標準偏差のかわりに絶対偏差を採用することである (Konno (1988))．X を確率変数とし，その密度関数を $f(x)$ とすると，その絶対偏差 $W(X)$ は

$$W(X)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|f(x)dx$$

で与えられる．μ はもちろん X の平均値である．

絶対偏差は，定義からもわかるとおり標準偏差と良く似た量である．実際，$(R_1, \dots, R_n)$ が多次元正規分布にしたがうときは，ある定数 k に対して，

$$W[R(x_1, \dots, x_n)]=kV[R(x_1, \dots, x_n)]$$

となることが知られている．

一般に絶対偏差は取扱いがややこしいので敬遠されがちである．しかし，ポートフォリオ選択問題 (1) の目的関数を $W[R(x_1, \dots, x_n)]$ でおきかえた問題：

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \text{最小化} & W[R(x_1, \dots, x_n)] \\ \text{条　件} & E[R(x_1, \dots, x_n)] \geqq r_0 M \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M, \quad x_j \geqq 0, \quad j=1, \dots, n \end{array}$$

は線形計画問題として定式化される．線形計画問題であれば，2次計画問題に比べて格段に速く解けることはもとより，(b) で述べた端数処理もずっと容易である．ふつうなら問題をややこしくするはずの絶対偏差が，ことポートフォリオ最適化問題に関しては標準偏差よりずっと

取扱いやすい性質をもっているのである．

さて，以上のモデルでは，リスクを定義するうえで，平均値の下側と上側を対象に扱い，どちらも好ましくないものと見なした．ところが，実は平均より上側にバラツイているものは，リスクというよりむしろ"メリット"というべきではないだろうか．そこで，筆者は図2に示した区分的に線形なリスク関数を用いて，個々の投資家のリスク感覚を組みこめるモデルを提案している (Konno (1989))．ちなみに，折線リスクモデルは，その折線が凸関数である限りは，問題 (3) と同様，線形計画問題として処理可能である．

また筆者らは，日経225に採用されている224銘柄の過去5年間のデータを用いて，さまざまな計算を行なってみたが，その結果，次のような特徴が確認された (Konno and Yamazaki (1989))．

（イ） 問題 (3) は問題 (1) より遥かに速く解ける．実際，東証一部上場 1,100 銘柄を対象とした問題も，(3) の場合は 10 MIPS 程度の計算機を使えば1分以内で解けるものと期待される．これに対して問題 (2) を解くのは，かなり手間がかかる．

（ロ） 過去60ヶ月間のデータを用いて，225銘柄を対象とした問題 (1) と (3) を解いたところ，それらの最適解は両者とも驚くほど似通っている．ちなみに，それらの解の成分の中でウエイトの大きい上位10銘柄を見ると，その中の8銘柄程度は同一である．また，各ポートフォリオを1年間にわたって追跡したパフォーマンスも，両者はほぼ一致している．

（ハ） 問題 (3) の最適解の標準偏差は，問題 (1) のそれと比べて10% 程度しか違わない (この差の大部分は，データが正規分布からカイ離している度合を表わすものと考えられる)．

以上より，当初予想したとおり，絶対偏差リスク・モデルによって，標準偏差モデルとほぼ同一の結果が手軽に得られることが示された．また，上で述べたマーコビッツ・モデルの短所 (a)，(b) も大幅に緩和されることも確認された．

参 考 文 献

Konno, H. (1988). Portfolio optimization using L_1 risk measure, IHSS 88-9, Inst. of Human and Social Sciences, Tokyo Inst. of Technology.

Konno, H. (1989). Piecewise linear risk functions and portfolio optimization, *J. Oper. Res. Soc. Japan* (to appear).

Konno, H. and Yamazaki, Y. (1989). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market, IHSS 89-12, Inst. of Human and Social Sciences, Tokyo Inst. of Technology.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, New York.