

分枝過程モデルによる  $1/f$  分布数列の発生\*

滋賀医科大学 物理教室 小林 隆 幸

(1989年5月 受付)

$1/f$  雑音 ( $f$  は周波数) に関する理論は多数発表されている (Pellegrini (1980, 1981, 1982), Rammel et al. (1985), Furukawa (1986), Geisel et al. (1988)) が, その大部分は  $1/f$  スペクトルを十分に広い周波数帯域で再現できなかつたり, 余りにも技巧的であつたりする. 本研究では, 広い周波数帯域で  $1/f$  スペクトルを持った数列を発生することのできるモデルを提唱する.

パワースペクトル密度 (PSD) が  $1/f^\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) の形をしている場合,  $\gamma$  が大きい程, 事象間の相関がいつまでも残る. 相関のある事象を考える場合, 原子炉中で連鎖反応によって生まれる中性子, あるいは中性子検出器からの信号を考えると分かり易い. それぞれの中性子は独立ではなく, 連鎖反応を通じて他の中性子と相関を持っているので, 中性子の数や検出器からの信号の分布もポアソン分布をしてはいないが, これらの分布に関する統計は分枝過程モデルによってよく記述できることが分かっている (Kobayashi (1968)). そこで, 分枝過程モデルを使って互いに相関のある事象を多数発生させ, これから得られる数列のスペクトルを計算してみる.

いま, 粒子が吸収されてなくなつたり, 分枝を起こして増えるような体系を考える. 体系中にランダムに粒子を放出する源がある時, 時刻  $t=0$  に  $k$  個の粒子があつたとして, 時刻  $t>0$  に  $n$  個の粒子が存在する確率  $P_k(n, t)$  は, Kobayashi (1988) より

$$(1) \quad P_k(n, t) = \sum_{i=0}^n K_k^{(n-i)} \cdot Q_0^{(i)}$$

となる. ここで,  $K_k^{(n-i)}$  および  $Q_0^{(i)}$  はそれぞれ, 時刻  $t=0$  に体系中に存在している  $k$  個の粒子, および  $(0, t)$  間に粒子源から放出される粒子の寄与を示している,

$$(2) \quad K_k^{(n-i)} = \sum_{l=0}^{n-i} p(l, t) \cdot K_{k-1}^{(n-i-l)}$$

$$(2') \quad K_0^{(n-i)} = \delta_{0, n-i}$$

である. (2)式において  $p(l, t)$  は, 時刻  $t=0$  に1個の粒子があつたとして, 時刻  $t>0$  に  $l$  個の粒子が存在する確率である.  $p(l, t)$  と (1)式の  $Q_0^{(i)}$  は, 粒子が2個に分枝する過程 (binary branching) の場合には厳密に計算でき,  $\beta = \lambda_c / \lambda_m \neq 1$  ( $\lambda_c, \lambda_m$  はそれぞれ吸収および分枝の割合) の時は

$$(3) \quad p(l, t) = \begin{cases} \frac{\beta(1-e^{-at})}{\beta - e^{-at}} & (l=0) \\ (\beta-1)^2 e^{-at} \frac{(1-e^{-at})^{l-1}}{(\beta - e^{-at})^{l+1}} & (l \geq 1) \end{cases}$$

\* 本稿は, 統計数理研究所 共同研究 (63-共会-51) における発表に基づくものである.

$$(4) \quad Q_0^{(i)} = \begin{cases} \exp \left[ S \frac{\beta-1}{\alpha} \ln \frac{\beta-1}{\beta-e^{-\alpha t}} \right] & (i=0) \\ \frac{S \frac{\beta-1}{\alpha} + i - 1}{i} \frac{1-e^{-\alpha t}}{\beta-e^{-\alpha t}} Q_0^{(i-1)} & (i \geq 1) \end{cases}$$

となる。ここで、 $S$ はランダムに粒子を放出する粒子源の強度で、 $\alpha = \lambda_c - \lambda_m$ である。一方、 $\beta = 1$ の時は、

$$(3') \quad p(l, t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} & (l=0) \\ \frac{1}{(\lambda_m t)^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-l-1} & (l \geq 1) \end{cases}$$

$$(4') \quad Q_0^{(i)} = \begin{cases} \exp \left[ -\frac{S}{\lambda_m} \ln (1 + \lambda_m t) \right] & (i=0) \\ \frac{S}{\lambda_m} + i - 1}{i} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} Q_0^{(i-1)} & (i \geq 1) \end{cases}$$

である。

モンテカルロ法を使い、(1)式から体系中に存在する粒子数を次々と計算して時系列を発生させた。この時、一番初めに体系中に存在する粒子数( $N_0$ )を10に固定した。また、粒子数を有限の値に保つために $\beta > 1$ では $S = \alpha N_0$ とし、 $\beta = 1$ では $S = 0$ とした。 $\beta = 1$ の時、 $S > 0$ とすると、粒子数の平均値は時間と共に増大する。粒子数の時系列のPSDを図1および2に示す。図の中で増殖率 $\mu$ は $\beta$ の逆数を表している。図から分かるように、 $\mu = 1$ の時はPSDは $1/f^2$ の分布をする。 $\mu < 1$ の時は、高周波領域では $1/f^2$ の変化をするが、周波数が小さくなると一定値に近づく。これは時間的に離れた粒子間の相関が、 $\mu < 1$ の場合には非常に弱いからである。

上に示すように、分枝過程が起きている体系中での粒子数の時系列は $1/f^2$ 分布をし、 $1/f$ 分布とはならない。これは、粒子数の時系列では事象間の相関が強いからである。それに対して個々の事象が起こる時間間隔(例えば、粒子検出の時間間隔)にはそれほど強い相関がないであろうと予想される。この場合、個々の事象は物理的な時間間隔とは異なった連鎖に添うパスを通じて相関を持っているから、時間間隔が短い事象が、長いものと比べて必ずしも強い相関を持っているとは限らない。そこで次に、体系中に粒子の検出器があると考え、粒子検出という事象の時間間隔を計算する。

時刻 $t=0$ に $k$ 個の粒子があり、 $(0, t)$ 間に $m$ 個の粒子が検出され、時刻 $t > 0$ に $n$ 個の粒子が存在する確率 $P_k(m; n, t)$ の一般的な形を示すのは困難であるが、 $m=0$ の場合には(1)式と同様な形で表すことができ、

$$(5) \quad P_k(0; n, t) = \sum_{i=0}^n K_k^{(0, n-i)} \cdot R_0^{(0, i)}$$

となる(Kobayashi(1988))。ここで、粒子が2個に分枝する過程を考え、検出器が吸収型のものであるとすると

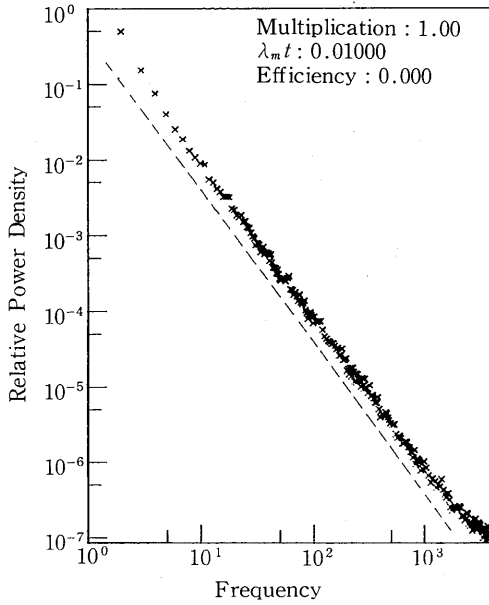


図1.  $\mu=1, \lambda_m t=0.01$  の場合における存在する粒子数からなる時系列の PSD. 点線は  $1/f^2$  分布を表す.

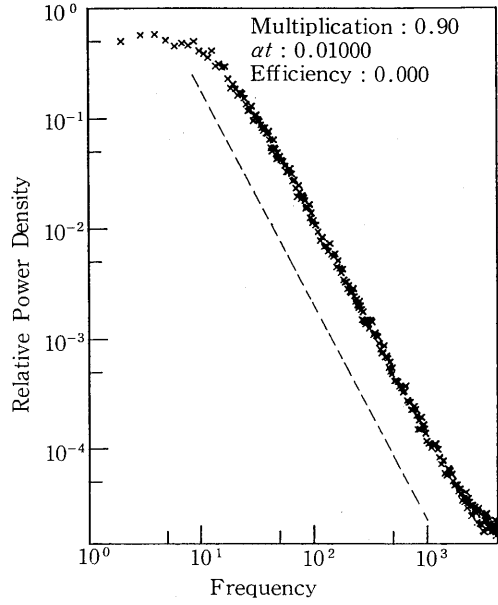


図2.  $\mu=0.9, at=0.01$  の場合における存在する粒子数からなる時系列の PSD. 点線は  $1/f^2$  分布を表す.

$$(6) \quad R_0^{(0, i)} = \begin{cases} \exp \left[ (\zeta - 1)St + \frac{\beta - 1}{\alpha} S \cdot \ln \frac{\eta - \zeta}{\eta - \zeta e^{-\theta t}} \right] & (i=0) \\ \frac{S^{\beta-1} + i - 1}{i} V \cdot R_0^{(0, i-1)} & (i \geq 1) \end{cases}$$

$$V = \frac{1 - e^{-\theta t}}{\eta - \zeta e^{-\theta t}}$$

であり,  $\theta, \eta, \zeta$  は

$$\theta = \frac{\alpha}{\beta - 1} \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\beta\epsilon}$$

$$\eta = \frac{1}{2} (\beta + 1 + \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\beta\epsilon})$$

$$\zeta = \frac{1}{2} (\beta + 1 - \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\beta\epsilon})$$

$$(\epsilon = \lambda_a / \lambda_c)$$

である. 上の式で,  $\lambda_a$  は粒子が検出される割合を示す.  $\beta=1$  ならば, これらは

$$\theta = 2\sqrt{\epsilon}(\lambda_m), \quad \eta = 1 + \sqrt{\epsilon}, \quad \zeta = 1 - \sqrt{\epsilon}$$

となる. 一方, (5)式の  $K_k^{(0, n-i)}$  は

$$(7) \quad K_k^{(0, n-i)} = \sum_{l=0}^{n-i} p(0; l, t) \cdot K_{k-1}^{(0, n-i-l)}$$

$$(7') \quad K_0^{(0, n-i)} = \delta_{0, n-i}$$

と表される。ここで、 $p(0; l, t)$ は、時刻  $t=0$  に1個の粒子があったとして  $(0, t)$ 間に粒子が検出されず、時刻  $t>0$  に  $l$ 個の粒子が存在する確率で、

$$p(0; l, t) = \begin{cases} \eta \zeta V & (l=0) \\ \frac{(\eta - \zeta)^2 e^{-\theta t}}{(\eta - \zeta e^{-\theta t})^2} & (l=1) \\ V \cdot p(0; l-1, t) & (l \geq 2) \end{cases}$$

によって与えられる。 $P_k(0; n, t)$ が1に非常に近い場合には、(1)式、(5)式から

$$(8) \quad P_k(1; n, t) \approx P_k(n, t) - P_k(0; n, t)$$

と近似することができる。 $m \neq 0, 1$ の時は  $P_k(m; n, t) \sim 0$ としてよい。

(1), (5), (8)式から次々と続いた微少な時間間隔での粒子検出の有無を計算し、これより粒子検出の間隔からなる数列を作った。その際、粒子源の強さ  $S$ の扱いは前の計算と同じにした。

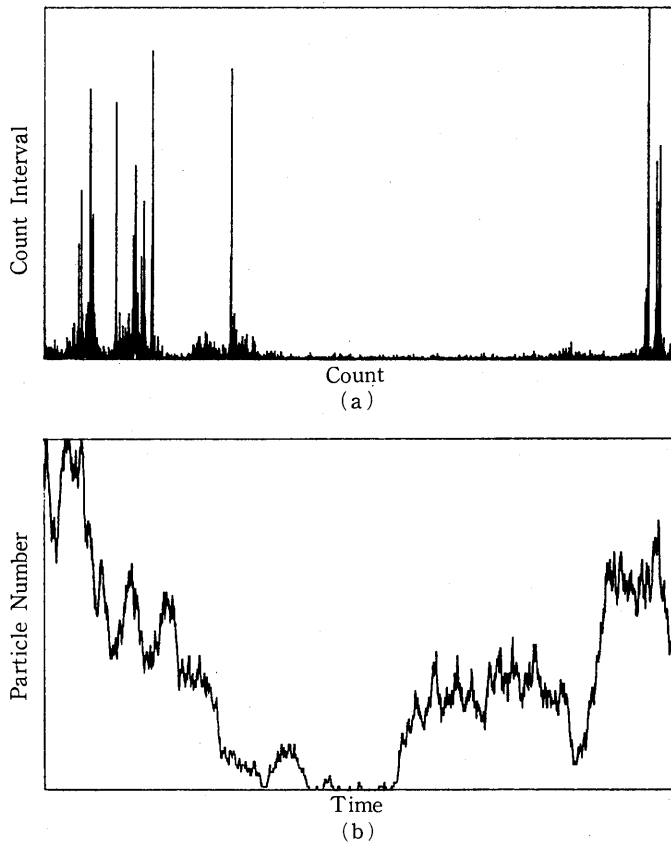


図3.  $\mu=1, \lambda_m t=0.0015, \epsilon=1$ の場合における粒子検出の間隔からなる数列(a), および図1と同じ条件での時系列(b).

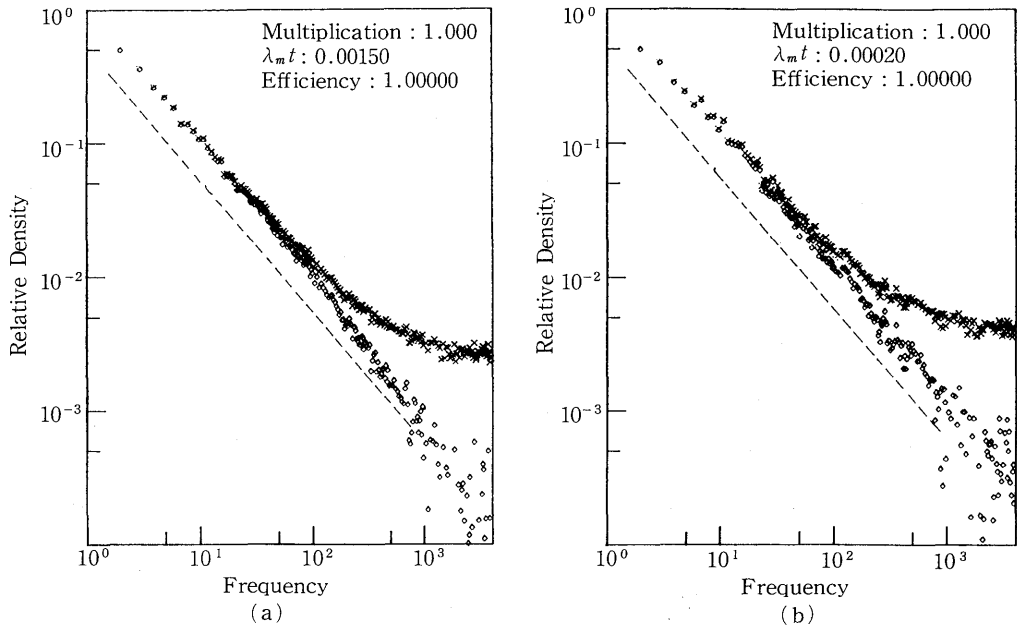


図4.  $\mu=1, \lambda_{mt}=0.0015, \epsilon=1$  の場合(a), および  $\mu=1, \lambda_{mt}=0.0002, \epsilon=1$  の場合(b)における粒子検出の間隔からなる数列の PSD.  $\times$ 印で表した点は数列から計算した PSD で,  $\diamond$ 印で表した点はそれからホワイトノイズ成分を差し引いたものである. 点線は  $1/f$  分布を表す.

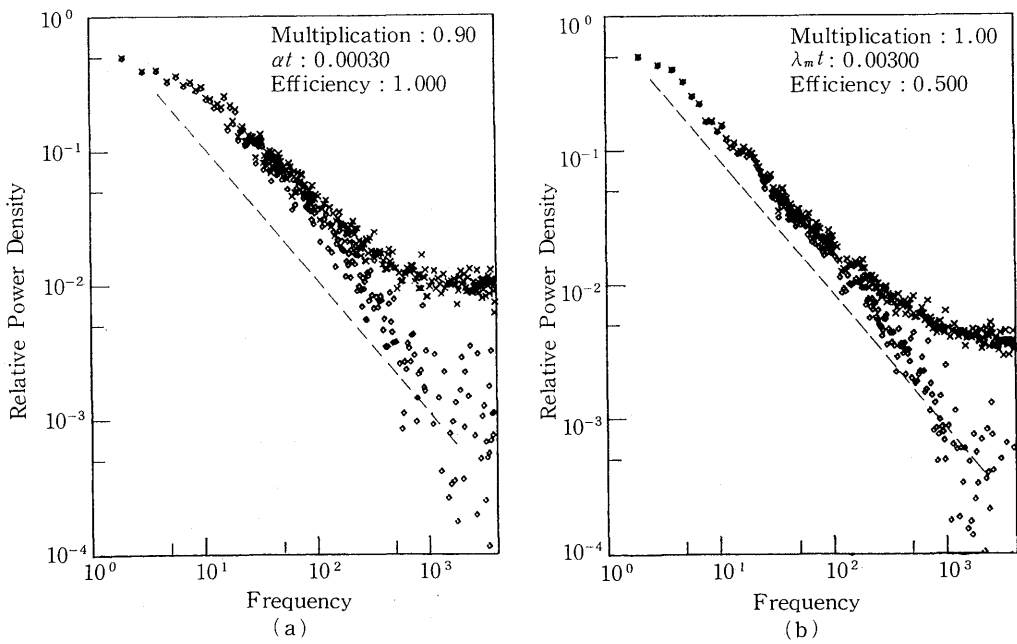


図5.  $\mu=0.9, \alpha t=0.0003, \epsilon=1$  の場合(a), および  $\mu=1, \lambda_{mt}=0.003, \epsilon=0.5$  の場合(b)における粒子検出の間隔からなる数列の PSD.  $\times$ 印,  $\diamond$ 印で表した点の意味は図4と同じである. 点線は  $1/f$  分布を表す.

数列の一部が図3に粒子数の時系列と比較して示されている。前者は後者に比べてより間欠的であることが分かる。粒子検出間隔からなる数列のPSDを図4に示す。高周波領域でPSDは一定値(ホワイトノイズ)に近づく。そこで、PSDがほぼ一定になっている部分のスペクトル密度を平均し、元のPSDから差し引いたものも図に示してある。これから三桁以上の範囲にわたって $1/f$ 分布をしているのが分かる。図5には、高周波領域では $1/f$ のように振る舞いが、低周波領域では一定値に近づく場合の例が示してある。 $\mu < 1$ の場合、一定値に近づく理由は粒子数の時系列の場合と同様であろうが、 $\mu = 1$ 、 $\varepsilon < 1$ の時にこのようなことが起こる理由は、 $N_0 \neq 1$ であるために相関を持たない連鎖が体系中にいくつか存在し、これによって粒子検出の間隔に相関を持たないものが混ざってくるためであろうと思われる。 $\varepsilon = 1$ の時には粒子が吸収される事象をすべて見ているが、 $\varepsilon < 1$ の時にはそれらの一部だけを見ているので、二つの並んだ粒子検出事象が異なった連鎖に属することが多くなるのであろう。

上のシミュレーションでは、存在している多くの粒子の中から検出される粒子のみに注目することによって、 $1/f$ スペクトルを持った数列を発生することができた。この場合、吸収型の検出器を考えたが、分枝を起こした時検出されるような式を組立て、上と同様の計算をしても同じような結果が得られるものと予想される。従って、 $1/f$ スペクトルを持つ現象は互いに相関関係を持った多くの事象の中から特定の事象を一つ一つ観測した時に見られる、と一般化することができるであろう。

### 参 考 文 献

- Furukawa, H. (1986). Universal spectra of quasirandom objects produced by off-equilibrium space divisions, *Phys. Rev. A*, **34**, 2315-2323.
- Geisel, T., Zacherl, A. and Radons, G. (1988). Chaotic diffusion and  $1/f$ -noise of particles in two-dimensional solids, *Z. Phys. B*, **71**, 117-127.
- Kobayashi, T. (1968). A study on the zero-probability method, *J. Nucl. Sci. Tech.*, **5**, 145-152.
- Kobayashi, T. (1988). Branching processes in the presence of random immigration and representations for time series, *J. Phys. A*, **21**, 3723-3737.
- Pellegrini, B. (1980). New theory of flicker noise, *Phys. Rev. B*, **22**, 4684-4691.
- Pellegrini, B. (1981). One model of flicker, burst, and generation-recombination noises, *Phys. Rev. B*, **24**, 7071-7083.
- Pellegrini, B. (1982). Diffusion, mobility fluctuations, and island models of flicker noise, *Phys. Rev. B*, **26**, 1791-1797.
- Rammel, R., Thannous, C., Breston, P. and Tremblay, A.-M. S. (1985). Flicker ( $1/f$ ) noise in percolation networks: A new hierarchy of exponents, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1718-1721.

Time Series with a  $1/f$  Distribution Generated  
by Using the Branching Process Model

Takayuki Kobayashi

(Department of Physics, Shiga University of Medical Science)

The branching process model was applied to generate the time series for number of particles existing in a system and for counts recorded by a detector places in the system. The power spectral density of the time series for particle number is characteristic of a  $1/f^2$  distribution, while the series made by time intervals between the adjacent counts has a  $1/f$  spectrum in a wide range of frequency.