

複数センサ安全監視システムにおける 最適センサ数*

統計数理研究所 村上 征 勝

(1989年6月 受付)

1. 目 的

超高層ビル, 大規模化学プラント, 原子力発電所, スペースシャトルなどにみられるように, 科学技術の進歩に伴い, 工学的システムも, 近年ますます巨大化, 複雑化している. しかし, このような巨大で複雑なシステムにおいて, ひとたび事故や故障が発生すると悲惨な事態となるのは, チェルノブイリ原子力発電所の事故や, スペースシャトルの爆発事故の例をみるまでもない.

このような悲惨な事態を未然に防ぐためには, 工学的システムそのものの信頼性を向上させ, 事故や故障の発生を最小限に抑えることが何よりも必要である. しかし, 不幸にも万一事故や故障が発生したならば, いち早くそれを発見し, 警報を出すことによって被害を最小限に食い止めることが肝要であり, そのためには安全監視の機能(安全監視システム)の充実を図ることが必要となる.

安全監視システムの設計においては, 監視システムそのものが故障する確率を小さくすることが, まず要求される. ところで, 安全監視システムの故障には, 欠報(不作動故障)と誤報(誤作動故障)の二通りがある. 欠報とは, 監視対象の工学的システムに異常が生じているにもかかわらず「警報を発しない」という故障であり, また誤報とは, 監視対象のシステムが正常な状態にあるにもかかわらず誤って「警報を発する」という故障である.

監視システムが故障することによって被る被害という観点から, 欠報と誤報とを比較するならば, 欠報の方がはるかに大きな被害をもたらすのは明らかである. しかしながら, 欠報を恐れるあまり, 監視システムに感度の優れたセンサを用いると, たとえば, 火災報知器がタバコの煙にも反応してしまうというように誤報が増加することが考えられる. 誤報による一回当りの被害は少なくとも, 誤報の回数が増えると, 「オオカミと少年」の寓話のように安全監視システムそのものへの信頼が失われることになり, ひいては大きな事故を引き起こすことにもなりかねない. 実際に, 1986年2月の熱川のホテル火災では, 誤報が多く煩わしいために火災報知器のスイッチを切っていたことが, 大きな惨事(死者24名)を招いたと新聞は伝えている(朝日新聞(1986)).

異常発生時には確実に警報を発し, しかも異常発生時に限り警報を発するという, 安全監視システムに求められる機能をできるだけ忠実に実現しようとするならば, たとえば, 複数個のセンサを空間的に配置し, タバコの煙のような局所的なセンサの反応には警報を出さないが, い

* 本研究は昭和60年度統計数理研究所共同研究(60-共研-58)「統計的決定理論を用いた安全監視システムの設計法」に関する研究, 及び昭和61, 62年度文部省科学研究費一般(B)(61450073)「統計に於ける情報の意味と役割に関する研究」の一部である.

くつかのセンサが反応した場合には警報を出すというような複数センサ安全監視システムが必要となる。しかし、その場合に安全監視システムの故障確率の最小化、あるいは、故障によって被る被害の最小化という観点だけから、この小論が対象とする複数センサ安全監視システムを設計すると、用いるセンサ数が多いほど故障確率を小さくすることができるため、監視システムは高価で、しかも、大きなものとなる。もちろん、故障確率の最小化、あるいは、故障による被害の最小化は安全監視システム設計において最も重要な設計要因ではあるが、現実には価格、重量、容積なども重要な設計要因となる場合が多い。たとえば、スペースシャトルなどの安全監視システムでは当然、重量、容積を考慮した設計が要求される。

このような理由から、システムの故障によって被る被害とシステムの価格の両方を考慮した設計法が考えられている。たとえば、Inoue et al. (1982) は、このような観点から、監視対象の工学システムにおける異常発生確率が既知の場合に、複数センサ安全監視システムを構成する最適なセンサ数を求めている。ただし、そこでは統計的決定問題としての取り扱いはされていない。

この小論では、まず複数センサ安全監視システムを構成する最適なセンサ数を求める問題を統計的決定問題として定式化し、次に監視対象の工学システムにおける異常発生確率が未知の場合に最適なセンサ数を求める方法を提案する。

2. 統計的決定問題としての定式化

複数センサ安全監視システムを構成する最適なセンサ数を求める問題を統計的決定問題として定式化するために、次のようないくつかの仮定をおく。

- 監視の対象となっている工学的システムは
 - θ_1 : 正常状態
 - θ_2 : 異常状態
 のいずれかの状態にある。
- 安全監視システムは n 個 ($n \geq 2$) の同じ信頼性を有するセンサで構成され、各センサは
 - Z_1 : 異常を感知していない
 - Z_2 : 異常を感知している
 のいずれかの状態にある。
- n 個のセンサの状態は、 Z_2 状態にあるセンサの個数 k ($k=0, 1, \dots, n$) として集約される。この情報を X_k で表記する。
- 情報 X_k に基づいて、安全監視システムは
 - a_1 : 警報を出さない
 - a_2 : 警報を出す
 のいずれかの判断（行動）を取る。
- 安全監視システムに誤報、欠報という故障が生じた時の損失を、それぞれ
 - L_1 : 誤報損失 (θ_1 の時に a_2 と判断した場合の損失)
 - L_2 : 欠報損失 (θ_2 の時に a_1 と判断した場合の損失)
 とし、故障が生じない場合の損失は 0 とする (表 1)。

さて、 n 個のセンサからの情報 X_k に基づいて安全監視システムは a_1 か a_2 のいずれかの行動を取るが、どの X_k に対してどの行動を取るかを決めた規則

表1. 誤報損失と欠報損失.

安全監視システムの出力 監視対象システムの状態	警報を出さない a_1	警報を出す a_2
正 常 : θ_1	0	L_1 (誤報損失)
異 常 : θ_2	L_2 (欠報損失)	0

$$d^n(X_k) = a_i \quad k=0, \dots, n, \quad i=1, 2$$

を決定方式と呼ぶ. この問題の場合には, X_k は X_0, X_1, \dots, X_n の $(n+1)$ 通り考えられるので, 各 X_k に対する a_1, a_2 の対応方法は 2^{n+1} 通りあり, したがって, 決定方式の総数は 2^{n+1} 個となる.

ところで, センサの誤報確率, つまり θ_1 の状態の時にセンサが Z_2 となる確率 $P(Z_2 | \theta_1)$ と, センサの欠報確率, つまり θ_2 の状態の時に Z_1 となる確率 $P(Z_1 | \theta_2)$ を, それぞれ

$$P(Z_2 | \theta_1) = p$$

$$P(Z_1 | \theta_2) = q$$

とすると (表2), 各センサの信頼度 (誤報, 欠報確率) がすべて等しい場合には n 個のセンサより成る安全監視システムにおいて, 状態 θ_1, θ_2 の時に情報 X_k を得る確率 $P(X_k | \theta_1, n)$, $P(X_k | \theta_2, n)$ は, それぞれ

$$(2.1) \quad \begin{aligned} P(X_k | \theta_1, n) &= \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k \\ P(X_k | \theta_2, n) &= \binom{n}{k} q^{n-k} (1-q)^k \end{aligned}$$

となる.

n 個のセンサから成る監視システムにおいて, ある決定方式 d^n (添字の n はセンサ数が n 個の場合の決定方式であることを示す) を用いた場合, 誤報, 欠報という故障を生じる確率 $P(a_2 | \theta_1, d^n), P(a_1 | \theta_2, d^n)$ は

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P(a_2 | \theta_1, d^n) &= \sum_{k=0}^n P(X_k | \theta_1, n) \delta_1(X_k) \\ P(a_1 | \theta_2, d^n) &= \sum_{k=0}^n P(X_k | \theta_2, n) \delta_2(X_k) \end{aligned}$$

となる. ただし,

表2. センサの信頼度.

センサの出力 監視対象システムの状態	異常を感知していない Z_1	異常を感知している Z_2
正 常 : θ_1	$1-p$	p
異 常 : θ_2	q	$1-q$

$$\delta_1(X_k) = \begin{cases} 0 & d^n(X_k) = a_1 \text{ の場合} \\ 1 & d^n(X_k) = a_2 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$\delta_2(X_k) = \begin{cases} 1 & d^n(X_k) = a_1 \text{ の場合} \\ 0 & d^n(X_k) = a_2 \text{ の場合} \end{cases}$$

である。

さて、監視対象の工学システムに異常が発生する確率（事前確率） w が既知の場合には、次の式で表わされる期待危険度 $B(w, d^n)$ で決定方式の良さを評価する。

$$(2.3) \quad B(w, d^n) = (1-w)L_1P(a_2 | \theta_1, d^n) + wL_2P(a_1 | \theta_2, d^n)$$

2^{n+1} 個の決定方式の中で (2.3) 式の期待危険度を最小にする決定方式を事前確率 w に対するベイズ決定方式と呼び、このベイズ決定方式の期待危険度をベイズ期待危険度と呼んでいる。損失が表1の場合には、 $k=0, 1, \dots, n$ に対して

$$(2.4) \quad \frac{P(X_k | \theta_1, n)}{P(X_k | \theta_2, n)} > \frac{P(X_{k+1} | \theta_1, n)}{P(X_{k+1} | \theta_2, n)}$$

が成立するならば、任意の事前確率 $w (0 \leq w \leq 1)$ に対して表3に示した $(n+2)$ 個の単調な決定方式のいずれかがベイズ決定方式となることが証明されている (Karlin and Rubin (1956), Murakami (1983))。

ところで、条件付確率 $P(X_k | \theta_1, n)$, $P(X_k | \theta_2, n)$ が (2.1) 式で与えられる場合、 $1 > p + q$ ならば

$$\begin{aligned} & \frac{P(X_k | \theta_1, n)}{P(X_k | \theta_2, n)} - \frac{P(X_{k+1} | \theta_1, n)}{P(X_{k+1} | \theta_2, n)} \\ &= \frac{\binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k}{\binom{n}{k} q^{n-k} (1-q)^k} - \frac{\binom{n}{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} p^{k+1}}{\binom{n}{k+1} q^{n-(k+1)} (1-q)^{k+1}} \\ &= \frac{(1-p)^{n-k} p^k}{q^{n-(k+1)} (1-q)^{k+1}} \left(\frac{1-q}{q} - \frac{p}{1-p} \right) \\ &= \frac{(1-p)^{n-(k+1)} p^k}{q^{n-k} (1-q)^{k+1}} (1-p-q) \\ &> 0 \end{aligned}$$

表3. $(n+2)$ 通りの単調な決定方式.

	X_0	X_1	...	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	...	X_{n-1}	X_n
d_0^n	a_1	a_1	...	a_1	a_1	a_1	...	a_1	a_1
d_1^n	a_1	a_1	...	a_1	a_1	a_1	...	a_1	a_2
d_2^n	a_1	a_1	...	a_1	a_1	a_1	...	a_2	a_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
d_k^n	a_1	a_1	...	a_1	a_2	a_2	...	a_2	a_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
d_n^n	a_1	a_2	...	a_2	a_2	a_2	...	a_2	a_2
d_{n+1}^n	a_2	a_2	...	a_2	a_2	a_2	...	a_2	a_2

より (2.4) 式が成立する。したがって、 $1 > p + q$ ならば、任意の事前確率 (異常発生確率) w ($0 \leq w \leq 1$) に対して表 3 の単調な決定方式のいずれかがベイズ決定方式となるため、センサ数が n 個の場合には 2^{n+1} 通りの決定方式の中で表 3 以外の決定方式はもはや考慮する必要はなくなる。

通常、センサの誤報確率 p と、欠報確率 q は非常に小さいと考えられるので、以後 $1 > p + q$ が成立すると仮定する。この仮定の下では監視対象の工学システムにおいて異常発生確率 w がどのような値であっても、 n 個のセンサから成る監視システムでは警報発生のための決定方式としては、表 3 の $(n+2)$ 通りを考慮しておけば十分であり、この意味で、この $(n+2)$ 個の決定方式を、 n 個のセンサから成る監視システムを用いた場合の決定方式の最小完備類と呼ぶ。最小完備類を構成する $(n+2)$ 個の決定方式は、ある r ($r=0, 1, \dots, n, n+1$) に関し

$$\begin{aligned} k \leq n-r & \quad \text{ならば} & \quad d(X_k) = a_1 \\ k > n-r & \quad \text{ならば} & \quad d(X_k) = a_2 \end{aligned}$$

つまり、 n 個のセンサのうち、 $(n-r+1)$ 個以上のセンサが異常を感知した場合に監視システムが警報を発するという決定方式であり、以後この決定方式を d_r^n で表示することにする (表 3)。Inoue et al. (1982) は、決定方式の最小完備類という概念を用いず、表 3 の警報発生方式が期待危険度を最小にする意味で最適なものであることを証明している。

さて、表 3 に示した最小完備類を構成する決定方式 d_r^n ($r=0, 1, \dots, n, n+1$) の期待危険度は、(2.2) 及び (2.3) 式より

$$(2.5) \quad \begin{aligned} B(w, d_r^n) = & (1-w) L_1 \sum_{i=n-r+1}^n \binom{n}{i} (1-p)^{n-i} p^i \\ & + w L_2 \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n}{i} q^{n-i} (1-q)^i \end{aligned}$$

となる。(2.5) 式からわかるように、 $w=0$ の時は d_0^n がベイズ決定方式となり、 w が 0 より大きくなるにしたがい、 d_1^n, d_2^n, \dots , という順でベイズ決定方式となる。 $w=1$ の時には、 d_{n+1}^n がベイズ決定方式となる。

3. 最適なセンサ数の決定

ある事前確率 w に対するベイズ期待危険度 ((2.5) 式) は、センサ数 n を増加させるにしたがい単調に減少する。したがって、監視システムを構成するセンサ数を多くすればするほど、安全監視システムの故障によって被る損失を少なくすることができる。しかし、センサ数の増加は、監視システムを高価なものとする。そこで、センサ 1 個を増加するに要するコストを c とした時、 n 個のセンサより成る監視システムの価格を単純に cn とし、この価格 cn とベイズ期待危険度 $B(w, d_r^n)$ との和 $I(w, n)$

$$(3.1) \quad I(w, n) = B(w, d_r^n) + cn$$

を考え、この (3.1) 式の $I(w, n)$ を最小にするセンサ数を、事前確率 w に対するセンサのコストを考慮した場合の安全監視システムの最適なセンサ数と定義する。以後事前確率 w に対する最適センサ数を $k(w)$ で表記することにする。事前確率 w が既知の場合、 $k(w)$ は n に関して一次元探索を行なうことによって見出すことができる (Inoue et al. (1982))。したがって、監視対象となっている工学的システムにおける異常発生確率 (事前確率) w が既知ならば $k(w)$ を

求めるのは容易である。しかし、多くのシステムにおいては w は不明であるため、この方法では $k(w)$ は求まらない。そこで、次のようにする。

(3.1) 式を最小とする最適なセンサ数 $k(w)$ は次のように解釈することができる。いま、 $(n-1)$, n , $(n+1)$ 個のセンサより成る三つの監視システムを考え、それらのシステムにおける事前確率が w の時のベイズ決定方式をそれぞれ d_r^{n-1} , d_s^n , d_t^{n+1} , またベイズ期待危険度を $B(w, d_r^{n-1})$, $B(w, d_s^n)$, $B(w, d_t^{n+1})$ とする。ここで、 $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n+1$, $0 \leq t \leq n+2$ である。

$k(w) = n$ とすると、 n は $I(w, n)$ を最小とする値であるので

$$I(w, n) < I(w, n-1)$$

$$I(w, n) < I(w, n+1)$$

より

$$(3.2) \quad \begin{aligned} B(w, d_r^{n-1}) - B(w, d_s^n) &> c \\ B(w, d_s^n) - B(w, d_t^{n+1}) &< c \end{aligned}$$

となる。つまり、センサ数が n までは、センサ数の増加によってもたらされるベイズ期待危険度の減少額はセンサのコスト c よりも多く、したがってセンサの増加によって $I(w, n)$ を減少させることができるが、センサ数が n 個以上になると、センサの増加によるベイズ期待危険度の減少額がセンサのコスト c よりも小さくなるため、センサの増加は意味がなくなる。このことから w が既知の場合に最適なセンサ数を求めるには、センサ数が n , $(n+1)$ の場合のベイズ決定方式を d_s^n , d_t^{n+1} , とした場合に

$$(3.3) \quad B(w, d_s^n) - B(w, d_t^{n+1}) < c$$

となる最小の n を求めればよい。

事前確率 w が未知の場合にも (3.2) 式と同じように考え

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq w \leq 1} \{B(w, d_r^{n-1}) - B(w, d_s^n)\} &> c \\ \max_{0 \leq w \leq 1} \{B(w, d_s^n) - B(w, d_t^{n+1})\} &< c \end{aligned}$$

を満たす n を、事前確率が未知の場合の最適なセンサ数と定義し、これを $k(\cdot)$ で表わすことにする。この場合、 $k(\cdot)$ を求めるには (3.3) 式と同様に

$$(3.4) \quad \max_{0 \leq w \leq 1} \{B(w, d_s^n) - B(w, d_t^{n+1})\} < c$$

を満たす最小の n を求めればよい。

この (3.4) 式から $k(\cdot)$ を求めるには、 w と n に関する二次元探索を行なわなければならないが、 w が 0 から 1 までの間の任意の値を取る連続型変数であるため、このままでは $k(\cdot)$ は求められない。そこで、決定方式の最小完備類を利用して、この探索を行なうことを考える。いま、センサ数 n の監視システムを用いた時の決定方式の最小完備類を $d_0^n, d_1^n, \dots, d_{n+1}^n$, センサ数 $(n+1)$ の監視システムを用いた時の決定方式の完備類を $d_0^{n+1}, d_1^{n+1}, \dots, d_{n+2}^{n+1}$ とする。

さて、 n 個のセンサの監視システムにおいて決定方式 d_s^n がベイズ決定方式となる事前確率 w の区間を $w_s \leq w \leq \bar{w}_s$ とすると、 w_s で d_{s-1}^n と d_s^n が、 \bar{w}_s で d_s^n と d_{s+1}^n がベイズ決定方式となる。したがって、

$$B(\underline{w}_s, d_{s-1}^n) = B(\underline{w}_s, d_s^n)$$

$$B(\tilde{w}_s, d_s^n) = B(\tilde{w}_s, d_{s+1}^n)$$

より、区間の端点の確率は、それぞれ

$$\underline{w}_s = \frac{L_1(1-p)^{s-1}p^{n-s+1}}{L_1(1-p)^{s-1}p^{n-s+1} + L_2q^{s-1}(1-q)^{n-s+1}}$$

$$\tilde{w}_s = \frac{L_1(1-p)^s p^{n-s}}{L_1(1-p)^s p^{n-s} + L_2q^s(1-q)^{n-s}}$$

となる。

ところで、 $0 \leq \alpha < s$ なる任意の整数 α に関して

$$\begin{aligned} & B(\underline{w}_s, d_{s+1}^{n+1}) - B(\underline{w}_s, d_s^{n+1}) \\ &= \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} \{ \underline{w}_s L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i - (1-\underline{w}_s) L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \} \\ &= \underline{w}_s \left\{ \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i + \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \right\} \\ &\quad - \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \\ &= \frac{1}{L_1(1-p)^{s-1}p^{n-s+1} + L_2q^{s-1}(1-q)^{n-s+1}} \\ &\quad \times \left[L_1(1-p)^{s-1}p^{n-s+1} \left\{ \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i \right\} \right. \\ &\quad \left. - L_2 q^{s-1} (1-q)^{n-s+1} \left\{ \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \right\} \right] \\ &= L_1 L_2 \sum_{i=n+2-s}^{n+1-\alpha} \binom{n+1}{i} q^{n+1-i} (1-q)^i (1-p)^{s-1} p^{n-s+1} \left\{ 1 - \frac{q^{i-(n-s+1)} p^{i-(n-s+1)}}{(1-q)^{i-(n-s+1)} (1-p)^{i-(n-s+1)}} \right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

また、 $s+1 < \beta \leq n+2$ なる任意の整数 β に関して

$$\begin{aligned} & B(\tilde{w}_s, d_{\beta+1}^{n+1}) - B(\tilde{w}_s, d_{s+1}^{n+1}) \\ &= \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} \{ (1-\tilde{w}_s) L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i - \tilde{w}_s L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i \} \\ &= \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \\ &\quad - \tilde{w}_s \left\{ \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i + \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i \right\} \end{aligned}$$

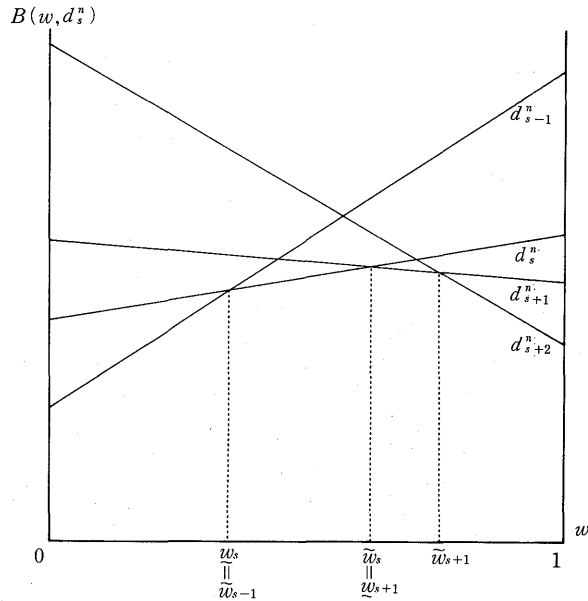


図1. 事前確率 w と $B(w, d_s^n)$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{L_1(1-p)^s p^{n-s} + L_2 q^s (1-q)^{n-s}} \left[L_2 q^s (1-q)^{n-s} \left\{ \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} L_1 (1-p)^{n+1-i} p^i \right\} \right. \\
 &\quad \left. - L_1 (1-p)^s p^{n-s} \left\{ \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} L_2 q^{n+1-i} (1-q)^i \right\} \right] \\
 &= L_1 L_2 \sum_{i=n+2-\beta}^{n-s} \binom{n+1}{i} q^s (1-q)^{n-s} (1-p)^{n+1-i} p^i \left\{ 1 - \frac{q^{n+1-s-i} p^{n-s-i}}{(1-q)^{n-s-i} (1-p)^{n+1-s-i}} \right\} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となる。 $B(w, d_s^n)$, $B(w, d_s^{n+1})$, $B(w, d_{s+1}^{n+1})$ はいずれも w に関し単調増加(減少)する一次関数で、その傾きが s に関して単調に減少するので(図1)、 d_s^n がベイズ決定方式となる事前確率 w の区間 $w_s \leq w \leq \bar{w}_s$ において、

$$B(w, d_s^n) - B(w, d_s^{n+1})$$

あるいは、

$$B(w, d_s^n) - B(w, d_{s+1}^{n+1})$$

が最大となるのは、 w が区間の端点 w_s , または、 \bar{w}_s の値を取った場合である。このことより、ある事前確率 w に対する二つの監視システムのベイズ決定方式 d_s^n と d_{s+1}^{n+1} との間には

$$t = s$$

あるいは、

$$t = s + 1$$

のいずれかの関係が成立することがわかる。したがって、事前確率 w が未知の場合には、

$$\begin{aligned} \Delta_s^n(w_s) &= [B(w_s, d_s^n) - \min\{B(w_s, d_s^{n+1}), B(w_s, d_{s+1}^{n+1})\}] \\ \Delta_s^n(\bar{w}_s) &= [B(\bar{w}_s, d_s^n) - \min\{B(\bar{w}_s, d_s^{n+1}), B(\bar{w}_s, d_{s+1}^{n+1})\}] \\ \Delta_s^n &= \max\{\Delta_s^n(w_s), \Delta_s^n(\bar{w}_s)\} \end{aligned}$$

としたときに、(3.4) 式より

$$(3.5) \quad \max\{\Delta_0^n, \Delta_1^n, \dots, \Delta_{n+1}^n\} < c$$

ならば、センサを1個増加したことによって得られる期待損失の減少額の最大値がセンサのコスト c より小さくなる。したがって、前述のように $(n+1)$ 個のセンサから構成される監視システムを用いる意味はなくなる。

ここでは、 $0 \leq w \leq 1$ の範囲で最適なセンサ数を求めたが、 w の範囲をもう少し狭く限定できるならば、その範囲の w に関してベイズ決定方式となる決定方式だけを考えれば良いので問題はさらに簡単となる。

実際に、事前確率が未知の場合に最適なセンサ数 n を求めるには、 $n=2$ から順次 n を1ずつ増加させながら (3.5) 式が成立するまで探索を行なう。

次に、いくつかの p, q, c, L_1, L_2 の値に対して最適なセンサ数 $k(\cdot)$ を求めた結果を示す。

4. 数値例及び今後の課題

センサの誤報確率 p 、欠報確率 q 、センサを1個増設するに要するコスト c 、誤報損失 L_1 、欠報損失 L_2 などの値は問題によって異なり、特定することはできないので、何種類かの人工的なデータで、監視対象の工学システムにおける異常発生 of 事前確率 w が不明の場合の最適なセンサ数 $k(\cdot)$ を求めてみた (表4参照)。 c, L_1, L_2 の単位は明記していないが、たとえば、 $c=0.5, L_1=100, L_2=1,000,000$ の場合にはセンサのコストの200倍が誤報損失、200万倍が欠報損失であると考えればよい。

$k(\cdot)$ は w が不明の場合のセンサ数の上限を与えると考えられるが、これらの計算結果から、この上限は意外に小さいことがわかる。ただ、こうして求めたセンサ数で安全監視システムを構成したとしても、 w が不明であるために、表3の $(n+2)$ 通りの決定方式の中のどれを具

表4. $c=0.5, L_1=100$ の場合の最適センサ数.

誤報確率 p	欠報確率 q	$L_2=1,000$	$L_2=10,000$	$L_2=100,000$	$L_2=1,000,000$
0.01	0.0001	2	3	3	3
0.05	0.0001	2	4	4	4
0.10	0.0001	3	4	4	4
0.15	0.0001	3	5	5	5
0.01	0.001	3	3	3	4
0.05	0.001	4	4	4	5
0.10	0.001	4	4	4	6
0.15	0.001	5	5	6	6
0.01	0.005	3	4	4	4
0.05	0.005	4	5	5	6
0.10	0.005	4	6	6	7
0.15	0.005	5	6	6	8

体的に用いるべきかという問題は解決されない。もし、安全監視システム導入後に、実験・解析などで w に関する情報が蓄積され、 w が推定できた場合には、その w に対するベイズ決定方式を用いればよい。しかし、 w が、 $w_0 \leq w \leq w_1$ というように漠然としか推定できない場合には、たとえば、

- (1) w の分布 $g(\cdot)$ を考え、 w の $g(\cdot)$ に関する平均を \bar{w} とした場合にこの \bar{w} に対して(2.5)式を最小にする決定方式を用いる
- (2) (2.5)式の右辺を $(1-w)B_1(d_1^n) + wB_2(d_1^n)$ とおいた時

$$B(d_1^n) = \begin{cases} (1-w_0)B_1(d_1^n) + w_0B_2(d_1^n) & B_1(d_1^n) \geq B_2(d_1^n) \text{ の場合} \\ (1-w_1)B_1(d_1^n) + w_1B_2(d_1^n) & B_1(d_1^n) < B_2(d_1^n) \text{ の場合} \end{cases}$$

を最小とする決定方式を用いる

などの方法を考えなければならない。このように、監視対象の工学システムにおける異常発生の前確率 w が不明の場合には、(3.4)式を満たす最小のセンサ数(最適センサ数 $k(\cdot)$)が求められたとしても、具体的にどの決定方式を用いるべきかという問題は依然として残っている。この点が今後検討すべき課題である。

謝 辞

本論文に対して査読者の方より多くの適切な助言をいただきました。特に、第4節後半の今後の課題の部分は、助言に基づき加筆致しました。ここに記して、感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 朝日新聞 (1986). 1986年2月25日号.
- Inoue, K., Kohda, T. and Kumamoto, H. (1982). Optimal structure of sensor systems with two failure modes, *IEEE Trans. on Reliability*, R-31-1.
- Karlin, S. and Rubin, H. (1956). The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio, *Ann. Math. Statist.*, **27**, 272-299.
- Murakami, M. (1983). Some properties of the risk set in multiple decision problems, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **35**, 175-183.

Choosing the Optimal Number of Sensors in Safety Monitoring Systems

Masakatsu Murakami

(The Institute of Statistical Mathematics)

Safety monitoring systems are indispensable, especially for huge engineering projects such as skyscrapers, chemical plants, nuclear power plants, and space shuttles, since an accident in such a location can lead to catastrophic results.

The primary role of a safety monitoring system is to issue an alarm signal if, and only if, the engineering system is malfunctioning. For this purpose, it is desirable to construct a monitor with multiple sensors. However, the more we decrease the probability of a safety monitoring system failure by increasing the number of sensors, the more the price of the total monitoring system goes up.

Inoue et al. (1982) have proposed a method of determining the number of sensors when both the minimization of safety monitoring system failure and the monitor installation price are of great importance. However, in their study they assume that the prior probability of malfunction in the engineering system is known. Surely this is seldom the case. Furthermore, they don't deal with statistical decision theory in their study.

In the present paper, we make use of statistical decision theory to determine the optimal number of sensors when the prior probability of engineering system malfunction is unknown. In addition, we apply this method to select the number of sensors in a theoretical case.