3. N 次元球面上の点対称な確率密度

N 次元単位球面は $\sum_{i=1}^{N+1} x_i^2=1$ であらわされる．その上の確率密度 $P(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})$ を考える．これに従うランダムな点 $A_1, A_2, \ldots, A_{N+2}$ の位置は，互いに独立とする．そのなかから N 個の点の組 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_N}$, $i_1<i_2<\cdots<i_N$, をえらび，それらと球の中心を通る超平面 $PL_{i_1i_2\cdots i_N}$ を考える．残りの2点が $PL_{i_1i_2\cdots i_N}$ の両側に1つずつあるという事象を $F_{i_1i_2\cdots i_N}$ とする．そのとき次の定理を得る．

定理 3. $P(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})$ が球の中心に関して対称であれば

$$P_r\left(\bigcap_{i_1<i_2<\cdots<i_N} F_{i_1i_2\cdots i_N}\right)=\frac{1}{2^{N+1}}$$

が成りたつ．

参 考 文 献

[1] Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Prog. Theor. Phys.*, **78**, 507-510.

[2] 伊藤栄明 (1987). 戸田格子の保存量と生存競争の系の保存量，統計数理，**35**, 73-80.

[3] Itoh, Y. (1988). Integrals of a Lotka-Volterra system of infinite species, *Prog. Theor. Phys.*, **80**. (in press).

多次元正規分布の不完全モーメントについて

岡 﨑 卓

1. 多変数正規分布において，通常のモーメントは容易に計算することができ，分散共分散行列による簡潔な表現が与えられていることは周知の通りであるが，絶対値モーメントや，より基本的な統計量である不完全モーメントについては次元数 n が小さい場合を除いて具体的表現が得られていない．すなわち正規確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の不完全モーメント $\mu_{m_1m_2\cdots m_n}=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}fdx$（$f$ は確率密度関数）は $n\leqq 3$ であれば直接積分が可能であり，その結果は個々のベキ m 毎に公式としてまとめられている．しかし $n\geqq 4$ ではもはや積分計算の遂行が困難となるため相関係数の Tailor 展開による表現が与えられているに過ぎない．本報告では不完全特性関数を導入して，任意の次元数 n につき不完全モーメントを系統的に求める方法の概略を記す．

2. 通常の特性関数 $\Phi=\langle e^{iX\varphi}\rangle$（$\varphi$: n 次元試験変数，$\langle\cdots\rangle$: 期待値，$\boldsymbol{i}^2=-1$）に対応して変数 X_i に関する不完全特性関数 Ψ_i を

$$\Psi_i=\langle Y_ie^{iX\varphi}\rangle$$

と定義する．ここに $Y_i=Y(X_i)$ は階段関数 $Y(u)=0\ (u<0)$, $Y(u)=1\ (u\geqq 0)$ である．この定義は二変数 X_i, X_j に関する不完全特性関数 $\Psi_{ij}=\langle Y_iY_je^{iX\varphi}\rangle$，更に全変数に関する不完全特性関数 $\Psi_{12\cdots n}=\langle Y_1Y_2\cdots Y_ne^{iX\varphi}\rangle$ に拡張される．不完全特性関数は不完全モーメントの母関数にあたり，任意ベキの不完全モーメントは Ψ の微分から求まる：$\mu_{m_1m_2\cdots m_n}=\left(\frac{\partial}{\boldsymbol{i}\partial\varphi_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial}{\boldsymbol{i}\partial\varphi_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\boldsymbol{i}\partial\varphi_n}\right)^{m_n}\Psi_{12\cdots n}\big|_{\varphi=0}$.

さて，階段関数 Y の Fourier 変換を用いれば，不完全特性関数は次のように特性関数 Φ に積分演算子を作用させた結果として表わされる．

$$\Psi_i = p_i\Phi = \left(\frac{1}{2}+q_i\right)\Phi, \qquad \Psi_{ij} = p_i p_j \Phi = \left(\frac{1}{2}+q_i\right)\left(\frac{1}{2}+q_j\right)\Phi,$$

$$\Psi_{12\cdots n} = p_1 p_2 \cdots p_n \Phi = \left(\frac{1}{2}+q_1\right)\left(\frac{1}{2}+q_2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+q_n\right)\Phi,$$

ここで φ の任意関数 F に対し $q_i F(\varphi) = \left[\int\cdots\int d\phi \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}(\phi_i-\varphi_i)} \prod_{k\neq i}^{n} \delta(\phi_k-\varphi_k)\right] F(\phi)$ である．先ず初等的計算によって $\Psi_i = \left[\frac{1}{2}+N(K_i(\varphi))\right]\Phi$ $\left(N(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^u e^{-t^2/2}dt,\ K_i(\varphi) = \sum_{k\neq i}^{n} \frac{B_{ik}}{\sqrt{B_{ii}}} \boldsymbol{i}\varphi_k,\ B\text{：分散共分散行列}\right)$ を知れば，順次 Ψ_{ij}，Ψ_{ijk} を求め最終的に全変数に対する $\Psi_{12\cdots n}$ の具体的表現を得ることができる．但し，これは一般に無限級数の形をとるので，相関係数の変数変換あるいは繰り込みの技法によって簡明且つ収束性の良い級数に改めることが今後の課題と考えられる．

負の二項分布の母数の推定

安　楽　和　夫

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を負の二項分布

$$P(x) = \binom{1/\theta + x - 1}{x}\left(\frac{1}{1+\theta\mu}\right)^{1/\theta}\left(\frac{\theta\mu}{1+\theta\mu}\right)^{x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,\quad \mu>0,\ \theta\geqq 0,$$

からの標本とすると，統計量 $t=\sum x_i$ は μ の完備十分統計量であり，$\bar{x}$ は μ の一様最小分散不偏推定量である．これは最尤推定量，モーメント推定量でもあり，妥当な推定量と思える．一方，θ の推定については，これまで最尤法とモーメント法が重視されてきたが，t を与えたときの条件付尤度から θ を推定する方法が有力と考えられる（Kalbfleisch and Sprott (1973)）．最尤推定量および条件付最尤推定量はそれぞれ，$(n-1)s^2/n > x$，$s^2 > x$ のとき，推定方程式

$$ULE(\boldsymbol{x};\theta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x_i}\frac{j-1}{1+\theta(j-1)} + n\frac{1}{\theta^2}\log(1+\bar{x}\theta) - n\frac{\bar{x}}{\theta} = 0$$

$$CLE(\boldsymbol{x};\theta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x_i}\frac{j-1}{1+\theta(j-1)} - \sum_{i=1}^{t}\frac{i-1}{n+\theta(i-1)} = 0$$

で与えられる．またこの2つの推定関数については，不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{x}}{1+\theta\bar{x}} < CLE(\boldsymbol{x};\theta) - ULE(\boldsymbol{x};\theta) < \frac{\bar{x}}{1+\theta\bar{x}},$$

が成り立つ．θ が真の母数に一致するとき，$CLE(\boldsymbol{x};\theta)$ の期待値は0となるので，$ULE(\boldsymbol{x};\theta)$ は負の偏りをもつ．また推定方程式の解の一意性を仮定すれば，常に条件付最尤推定量が最尤推定量より大きいことが分かる．

Godambe (1980) は期待値0の推定関数の族の中で条件付最尤推定関数が最適であることを示したが，最尤推定関数がこの族に入ってないので，この基準では比較できない．そこでシミュレーションによりこの2つの推定量とモーメント推定量について，バイアス，平均自乗誤差の比較を行った．その結果，条件付推定量の良さが認められた．特にいくつかの母集団に共通の θ を推定する場合には，他よりも完全に優れていることが分かった．

参　考　文　献

[1] Godambe, V. P. (1980). *Biometrika,* **67**, 155-162.
[2] Kalbfleisch, J. D. and Sprott, D. A. (1973). *Sankhyā,* **35**, 311-328.