

公開講演会要旨

統計基礎研究への「数式処理」の応用

統計数理研究所 安芸重雄

(昭和63年11月4日, 統計数理研究所 講堂)

従来、統計基礎研究の分野における計算機の利用については、統計量の性質を調べるためのシミュレーションが殆どであった。シミュレーションの威力は絶大で、解析的には手も足も出ないような問題に対しても見通しをつけることができる。実際、理論的な論文にも、たいいていシミュレーションの結果が載せられていて、シミュレーションが統計基礎研究の形態を変えたと言っても過言ではない。

こうなった背景には、計算機の発達によって、数値計算が速くできるようになったことと、質のよい乱数が高速に使えるようになったことがある。ところで最近では、計算機がさらに進んだことによって数式処理や画像処理等が大型計算機やワークステーション、またパーソナル・コンピュータ上で簡単に利用できるようになってきている。このことがさらに統計基礎研究の形態を変えつつある。

よく知られた例としては、統計量の分布の漸近展開に数式処理を応用したものがある(例えば、仁木(1986)及びその引用文献参照)。その他、数式処理の強力な多項式演算の機能を利用してゾーナル多項式等の計算を行なわせ、多変量分布論への応用が試みられている(安芸(1985)参照)。これらの例のように手計算ではできないような結果を導き出すことの他に、数式処理には意外な活用法がある。これから挙げる例は、数式処理によって新しい事実を発見したというものである。しかも、その事実を理論的に証明することができたために、結果的には数式処理を使ったことが表に出なくなった。

オーダー k の二項分布という離散分布がある。その確率関数は次のように与えられる。

$$P(X=x) = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{x_1+2x_2+\dots+kx_k=n-m-kx} \binom{x_1+\dots+x_k+x}{x_1, \dots, x_k, x} p^n \left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\dots+x_k}$$

ここで n, k, p はパラメータで n と k は自然数、 p は $0 < p < 1$ を満たす実数、 $q = 1 - p$ とする。

また、 x は 0 から $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ までの整数値をとることができる。この式は見たとおりに非常に複雑な形をしており、平均値等の分布の特性量をパラメータの関数として表現するのも容易ではない。そこで、数式処理システム REDUCE を用いて、 k と n に具体的な数字を入れた場合の、この分布の平均を p の関数として求めてみた。すると想像もつかないくらいに簡単な多項式が得られた。 k と n の値を動かして平均の一般形を予想したところ

$$\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \{(n-jk+1)p^{jk} - (n-jk)p^{j(k+1)}\}$$

という形になることが分かった。それから実際に、この結果を証明することができた(Aki and Hirano (1988))。しかもこの形が非常に簡単であったことから、パラメータ p のモーメント法

による推定を検討したところ最尤推定に比べて殆ど劣らないという幸運な結果が得られた (Aki and Hirano (1989)).

この例のように数式処理によって意外な展望が開けることは他の場合にもよく起こる。また、画像処理と組み合わせることによって更に多様な可能性が広がりつつある。

参 考 文 献

- 安芸重雄 (1985). 数式処理の多変量解析への応用, 数式処理通信, Vol. 2, No. 4, 28-36.
- Aki, S. and Hirano, K. (1988). Some characteristics of the binomial distribution of order k and related distributions, *Statistical Theory and Data Analysis II* (ed. K. Matusita), North-Holland, Amsterdam, 211-222.
- Aki, S. and Hirano, K. (1989). Estimation of parameters in the discrete distributions of order k , *Ann. Inst. Statist. Math.*, **41**, 47-61.
- 仁木直人 (1986). 確率分布漸近展開の数式処理, 数学, Vol. 38, No. 1, 65-71.