

集中多様体と集中解析のシステム (II)*

—— 相対的ベクトル積率と非線形集中統計量 ——

統計数理研究所 田 口 時 夫

(1988年10月 受付)

1. 序論 —— 集中統計量の形成に果たしたインド学派の役割 ——

前稿(I) (田口(1988a))において、集中曲面と集中多様体を定義し、その幾何学的解析を通じて、ベクトル積率を析出した。これは、従来のモメントに対比されるべき統計解析のための基本量であって、それらの間の簡単な代数的演算によって各種の統計量を与えることができた。ただ前稿では、それらは線形構造をもつ集団に限定して構成されたが、ある種の基本的な非線形構造をもつ集団に対しても、相対的ベクトル積率を用いて、これに適した非線形集中統計量を単純な形式によって与えることができる。ここで相対的ベクトル積率とは、前稿で述べたベクトル積率 $\Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}; \Delta_{20}, \Delta_{21}, \Delta_{22}; \Delta_{xy}$ 等に対応する $G_{10}, G_{11}, G_{12}; G_{20}, G_{21}, G_{22}; G_{xy}$ 等の総称であるが、その本論に入る前に、こうした従来のモメント法に対立した記述系を求める試みが、極めて現実的な課題のもとで、既に1960年代以降において徐々に行われていたことを知ることはそれなりの意義があり、又、関心を呼ぶものである。

その現実的課題とは、センサスに基づく家計簿データの解析であり、その中心はエンゲル弾力性係数の測定に置かれたから、直接非線形構造の記述が目的とされ、その方法が追求されたのである。しかしながら、当時の統計方法論は、本質的に線形構造を対象とする段階に留まっていたから、非線形な弾力性の測定においても、まず観測値を対数変換によって線形化するという点では共通していたのである。勿論、参考文献に示す Iyengar の方法論は、直接非線形構造の特性に基づくものであったが、その場合は対象をジブラ型の所得分布に限定せざるを得なかったのである。

さて、第2次大戦後の経済計画設定の一環として、家計簿分析による弾性値の測定に着目し、その実施に当たり、まず基礎的統計値に対数変換を加えるという共通性を除くと、弾性値の測定は大別して二つの異なる方向で、異なる国によって行われた。その一つは、かつて我国においても注目され、かつ現在も普及している Wold (1953) の「需要分析」に展開されている方式である。その方式とは、将に対数モメントをもとにした弾力性係数の記述に基づく測定であり、その理論と實際を結ぶ分析体系は、将に数理統計学に基づく計量経済分析の古典的地位を占めるものといえる。従って、ここで改めて取り上げるまでもないであろう。

* 本稿の前編(I)は統計数理研究所 共同研究(62-共研-90)、「バレート・ジーニをめぐる統計的諸問題 —— 集団構造の解析方法 ——」(研究代表者: 田口時夫, 共同研究員: 牧野都治, 豊田 敬)の一環をなすものであり、本編(II)は、それを引き継ぎ(63-共研-88)、「同上(続)」の一環をなすものである。又、その内容は、前編の冒頭に示した口頭発表の他に、1988年度科学研究費総合(A)「統計学の数理的基礎と諸分野への応用に関する研究」(研究代表者: 広津千尋)に基づくシンポジウム「数理統計学と計算機の接点に関する研究」(分担者: 渋谷政昭, 正法地孝雄)において「弾力性係数をめぐる疎な理論」として報告された。

他方、1960年代に入ると、地理的には勿論全く異なる状況下で、Mahalanobis (1960, 1964, 1965) の示す経済発展計画と、その設定の基礎となる統計指標の測定手法をめぐって一群のインド統計学者の活躍がみられる。すなわち、インド統計協会の有力なメンバーである J. Roy, I.M. Chakrawarti, N. Bhattacharya 等がこの課題に取り組んだのであり、その成果は ISI (1958), Bhattacharya (1964) 等に表示されている。更に、これらの研究方法は Kakwani (1980) 等に継承され、現在も活用されている。

彼らの弾性値の記述と測定方式は、一言にしていと基本的に (I) の表3の (3) で与えた $-\Delta_{11}/\Delta_{12}$ を、 $\log x, \log y$ をもとにして用いたものである。又、この方式を導入する基礎となった Mahalanobis のグラフ (1960) とは、(I) の図3における $L_{11}(x)$ 曲線に当たるものである。実際に、Mahalanobis はローレンツ曲線の一般化として集中曲面を得るには至らなかったから、集中統計量の種類も少ないが、曲線の平面的な延長として上記の集中曲線を得たのである。この方式は、後に著者が集中曲面の特性に基づく解析例として Taguchi (1981) において法人統計に適用した方式、及び田口 (1984) において家計簿統計によるエンゲル弾性値の初期値算出に用いた方式と全く同一であるから、本稿の序論としてインド学派の方法に言及することは欠かすことができない。

しかし、ここでは、ベクトル積率統計量の先駆をなす方式が統計解析の、いわば原点ともいえるエンゲル曲線の表現をめぐって生じたことを指摘することに留めて、先を急がねばならない。つまり、既に述べたように、北欧学派及びインド学派の弾力性測定方式は本質的には線形統計量に基づいているのであるが、本稿の目的は、本来的な非線形統計量を与えることにあるからである。

それは、第3節において存在が予想され、その形式は第4節において相対的ベクトル積率間の単純な四則演算をもとにして与えられる。

2. 集団構造の諸規定と性格

我々はこれまで、しばしば集団構造について云為してきた。ここで改めて、集団構造について若干の考察を加え、新たな規定を設けることにしよう。

そもそも、統計対象としての集団が (I) の表1,2の類の統計表による表現を必要とし、かつ可能としていることは、構造統計表の名の通り、現実の社会集団そのものがこの種の構造型をもつことの表明と受け取ってよいであろう。規模分布のみでシェア分布をもたない統計分布表が示す集団は、この場合、構造なき集団、又は0次元の集団、あるいは不完全集団といえる。より解析的に表現するならば、(I) の (2.5) 式で与えられた $L(x, y)$ が確定した曲面を形成する時、統計集団は構造をもつといえてよいであろう。

一般に、(2.5) 式の $u(x, y)$ が x, y について連続である時、 $L(x, y)$ は滑らかな曲面となり、 $u(x, y)$ が n 回連続微分可能ならば、それに応じて $L(x, y)$ は $n+1$ 回連続微分可能となるから、これらの特性をそのまま解析的集団の属性として構造規定に用いることができる。すなわち、連続な集団構造とか n 回微分可能な集団構造等とすることができる。この種の構造の特性は、集中曲面やベクトル積率の存在そのものに係わるものであり、又、その主要な性格を論じる上で基本的な重要性をもつものであるが、こうした基礎的課題については、既に Taguchi (1972a, 1972b, 1973), 田口 (1984) 等でかなり検討を加えているので、ここで改めて取り上げることはしない。ここでは集中曲面やベクトル積率の存在を前提として、集団構造の局所的特性による内部規定を、いわば補足として与えるに留める。

定義 1. 集中曲面 $L(x, y)$ の境界曲線 $L_1(x)$ ((I) の図 3 参照) が UVW 空間の同一平面上にある時, 従って, $L_1(x)$ の任意の点における接触平面及び単位従法線ベクトル $b_1(x)$ が一定である時, 標識 (x, y) の解析的集団は, x に関して線形構造をもつという. 更に, x, y の両者に関して線形構造をもつ時, 単に線形構造をもつという.

$u(x, y)$ が連続である時, $L_1(x)$ は (I) の (2.10) 式の記号を用いると Taguchi (1972a) により

$$(2.1) \quad L_1(x) = L(x, \infty) \equiv \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\xi}{\mu_x} \\ \frac{\mu_{y|\xi}}{\mu_y} \end{pmatrix} u_1(\xi) d\xi$$

である. 但し,

$$(2.2) \quad u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) dy$$

とする. 一方, 同論文の解析結果から線形構造が存在するためには, 定義 1 の平面が原点と頂点 $(1, 1, 1)$ を含むこと及び W 軸を含まぬことが要請されるから, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を定数とした時,

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^x \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\xi}{\mu_x} + \lambda_3 \frac{\mu_{y|\xi}}{\mu_y} \right) u_1(\xi) d\xi = 0$$

$$(2.4) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_3 \neq 0$$

が成立せねばならない. 従って, (2.3) 式を x について微分すると,

$$(2.5) \quad \lambda_1 + \lambda_2 \frac{x}{\mu_x} + \lambda_3 \frac{\mu_{y|x}}{\mu_y} = 0$$

となる. これにより, $\mu_{y|x}$ は x について線形となり,

$$(2.6) \quad \mu_{y|x} = \alpha_1 + \beta_1 x$$

と表現できる. これは y の x に関する回帰が線形であることに他ならない.

一般に, $L_1(x)$ の単位従法線ベクトルは, 田口 (1984) における (17) 式 (p. 139) を用いて,

$$(2.7) \quad b_1(x) = \left(\frac{x\mu'_{y|x} - \mu_{y|x}}{\mu_x\mu_y}, -\frac{\mu'_{y|x}}{\mu_y}, \frac{1}{\mu_x} \right) / \left| \left(\frac{x\mu'_{y|x} - \mu_{y|x}}{\mu_x\mu_y}, -\frac{\mu'_{y|x}}{\mu_y}, \frac{1}{\mu_x} \right) \right|$$

で表わされる. 従って, 逆に, (2.6) 式が成立すると,

$$(2.8) \quad b_1(x) = (-\alpha_1, -\beta_1\mu_x, \mu_x\mu_y) / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2\mu_x^2 + \mu_x^2\mu_y^2} = b_1 \quad (\text{定数})$$

となり, $L(x, y)$ は x に関して線形構造をもつことになる. 故に,

定理 1. それぞれが 0 でない確定した平均値をもつ標識 x 及び y により規定され, 連続な規模分布 $u(x, y)$ をもつ解析的集団が, x に関して線形構造をもつための必要, かつ十分な条件は, y の x に関する回帰関数が線形となることである. 又, この時, $L_1(x)$ の単位従法線ベクトルは, (2.8) 式で表わされる. y に関する線形構造は, $L_2(y)$ をもとにして同様に表現される.

さて、定義1の線形構造の規定からすれば、そこに示された条件が満されぬ場合、一般的に、集団は非線形構造を取るといってよい。しかしながら、線形構造を示す集団の標識 x 及び y の一方、又は双方に、連続的関数変換を施して構成されるような非線形構造はあまりに形式的であり、非線形の実質を与えるものではない。非線形構造を実質的に意味のあるものとするためには、その内部的特性を用いて具体的に規定すべきであろう。同一平面上にない、一般の空間曲線の特性を与える解析概念には、曲率、法線、従法線とその間の関係があり、その観点による $L_1(x)$ の解析は、既に田口(1984)によって行われている。pp. 140-145 に示されたその結果に従って、我々は具体的な非線形構造の例を、次の定義によって与えることができる。

定義2. 集中曲面 $L(x, y)$ の境界曲線 $L_1(x)$ 上の各点における単位弾力性ベクトル $e_1(x)$ (上掲書、定義4.10 参照)が一定で、ベクトル e_1 である時、標識 (x, y) の解析的集団は、 x に関して定弾力性構造をもつという。又、他の境界曲線 $L_2(y)$ が同様の性質を示す時、 y に関して定弾力性構造をもつという。更に、 x, y の両者について定弾力性構造をもつ時、単に定弾力性構造をもつという。

上掲書によると $L_1(x)$ の点における単位弾力性ベクトル $e_1(x)$ は、その点における単位接線ベクトル $t_1(x)$ 及び単位従法線ベクトル $b_1(x)$ をそれぞれ

$$(2.9) \quad \begin{aligned} t_1(x) &= (t_{10}(x), t_{11}(x), t_{12}(x)), \\ b_1(x) &= (b_{10}(x), b_{11}(x), b_{12}(x)) \end{aligned}$$

とした時、 $t_1(x)$ 、 $b_1(x)$ によって形成されるベクトルで、

$$(2.10) \quad \begin{aligned} e_1(x) &\equiv (e_{10}(x), e_{11}(x), e_{12}(x)) \\ &= \frac{(t_{10}(x)b_{10}(x), t_{11}(x)b_{11}(x), t_{12}(x)b_{12}(x))}{|(t_{10}(x)b_{10}(x), t_{11}(x)b_{11}(x), t_{12}(x)b_{12}(x))|} \end{aligned}$$

によって表現されるベクトルである。従って、定理4.12(上掲書)に示すように、 $e_1(x)$ は均等線方向の単位ベクトル λ に、常に直交するベクトルである。

さて、上掲書、(20)式 (p. 140) によると、 $e_1(x)$ は

$$(2.11) \quad e_1(x) = \frac{(x\mu'_{y|x} - \mu_{y|x}, -x\mu'_{y|x}, \mu_{y|x})}{|(x\mu'_{y|x} - \mu_{y|x}, -x\mu'_{y|x}, \mu_{y|x})|}$$

である。他方、 x における y に関する弾力性係数 $\eta_1(x)$ は、ISI (1958) の (14) 式 (p. 79) で明白に規定されており、我々もよくそれを用いているように、

$$(2.12) \quad \eta_1(x) = \frac{x}{\mu_{y|x}} \frac{d\mu_{y|x}}{dx} = \frac{d \log \mu_{y|x}}{d \log x}$$

与えられる。従って、 $e_1(x)$ は、更に、

$$(2.13) \quad e_1(x) = \frac{(\eta_1(x) - 1, -\eta_1(x), 1)}{\sqrt{2\{\eta_1^2(x) - \eta_1(x) + 1\}}}$$

と表わされることになり、従って、次の定理が成立する。

定理2. 集中曲面 $L(x, y)$ の境界曲線 $L_1(x)$ 上で2階微分可能な標識 (x, y) をもつ解析集団が定弾力性構造をもつための必要、かつ十分な条件は $x > 0$ であり、かつ y の x に関する回帰

曲線 $\mu_{y|x}$ が存在し, γ, η を定数として,

$$(2.14) \quad \mu_{y|x} = \gamma x^\eta \quad \gamma \neq 0, \quad x > 0$$

と表現されることである.

以上において $L_1(x)$ の 2 階微分可能条件が要請されることは (2.7) 式により明らかである. $L_2(y)$ を基準にして同様の結果が与えられることも, 又, 明らかである.

定弾力性構造をもたない集団は, 一般に, 変動弾力性構造をもつといえるが, それは (2.14) 式を満たさない構造を意味する.

さて, $e_1(x)$ の性格を, 更に明確にするために, 次の補足を加えることにする.

1. 二つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に関する中間積を, 記号 \circ を用いて, 次の双一次条件を満たす演算

$$(2.15) \quad \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3)$$

によって定義すると, $e_1(x)$ は

$$(2.16) \quad e_1(x) = \frac{t_1(x) \circ \mathbf{b}_1(x)}{|t_1(x) \circ \mathbf{b}_1(x)|}$$

によって表現される.

2. $e(x)$ はその起点を原点にとると, 均等線に直交する弾力性平面 (田口 (1984), 図 4.9, 4.10 (p. 143) 参照) 上のベクトルとなるが, その平面上で直交する定ベクトル

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \mu &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \nu &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

に関して

$$(2.18) \quad e_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\eta^2(x) - \eta(x) + 1}} [\{-2\eta(x) + 1\} \mu + \sqrt{3} \nu]$$

と表現される.

これにより $e_1(x)$ は, μ を基準として左廻りに ν に向うこの角度 θ と, $(0, \pi)$ の範囲内で一意単調に対応することになる (上掲書, 定理 4.14 (p. 142) 参照).

これまでに述べた集団の内部構造は, 集中曲面の境界曲線の特性によって規定されたが, それは, 又, 回帰曲線のパターンを特定するものでもあった. それ以外の構造は, $\mathbf{b}(x)$ や $e(x)$ の変動の形態や, $L(x)$ を特徴づける曲率 $\rho(x)$, 振率 $\tau(x)$ 等の形態によって無数に与えることができよう. その他の構造の存在は, 次の例が示すように理論的あるいは経験的な回帰曲線を基準にして考えられる. 例えば, 所得分布として, ある国, ある時期には適合性が高いといわれるアモローゾー分布 (一般化ガンマ分布) の回帰関数は,

$$(2.19) \quad \mu_{y|x} = (1 - \rho^h)^{1/\theta h} \frac{\Gamma(1/h + 1/\beta h)}{\Gamma(1/h)} \exp\left(-\frac{\rho^h x^{\alpha h}}{1 - \rho^h}\right) F\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\beta h}, \frac{1}{h}; \frac{\rho^h x^{\beta h}}{1 - \rho^h}\right)$$

であり, 一般的には (2.6) 式も (2.14) 式も満たさない (上掲書, (99) 式 (p. 167) 参照). 又, Wold

((1953), pp. 107-108) によると Törnqvist 需要関数系はフィンランドやスウェーデンで、ある時期、高い適合性を示したのであるが、それは所得を x 、特定商品に対する需要を $\mu_{y|x}$ とすれば、

(1) 必需品に対して：

$$(2.20) \quad \mu_{y|x} = k \frac{x}{x+\beta} \quad \beta > 0$$

(2) やや贅沢品に対して：

$$(2.21) \quad \mu_{y|x} = k \frac{x-x_0}{x+\beta} \quad x_0 > 0, \quad \beta > -x_0$$

(3) 贅沢品に対して：

$$(2.22) \quad \mu_{y|x} = ax \frac{x-x_0}{x+\beta} \quad a > 0, \quad x_0 > 0, \quad \beta > -x_0$$

(4) 劣等品に対して：

$$(2.23) \quad \mu_{y|x} = k \frac{x}{x-\beta}, \quad \mu_{y|x} = k \frac{x-x_0}{x-\beta}$$

であった。但し、(2.23)式のそれぞれに対して $x > \beta > 0$ 及び $x > \beta > x_0$ とすることができる。従って、この場合も (2.6) 及び (2.14) 式は満されない。

しかしながら、多種の集団構造の存在を追跡することは、本稿の主たる目的ではない。次節においては、定弾力性構造に焦点を絞って、相対ベクトル積率の記述力を追求することにする。

3. 集団構造に対する集中統計量の記述性

集中統計量が、第2節定義1,2で規定したような集団構造の記述に適していることは、その構成要素となるベクトル積率自体が、次のように回帰関数によって基本的に規定されているからである。すなわち、

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta_{10} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{sgn}(x_2 - x_1)\} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \mu_{y|x_1} & \mu_{y|x_2} \end{array} \right| f_1(x_1) f_1(x_2) dx_1 dx_2, \\ \Delta_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{sgn}(x_2 - x_1)\} (\mu_{y|x_1} - \mu_{y|x_2}) f_1(x_1) f_1(x_2) dx_1 dx_2, \\ \Delta_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2 - x_1| f_1(x_1) f_1(x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

及び

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta_{20} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{sgn}(y_1 - y_2)\} \left| \begin{array}{cc} \mu_{x|y_1} & \mu_{x|y_2} \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| f_2(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, \\ \Delta_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |y_1 - y_2| f_2(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, \\ \Delta_{22} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{sgn}(y_1 - y_2)\} (\mu_{x|y_2} - \mu_{x|y_1}) f_2(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

であり、又、

$$(3.3) \quad \Delta_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\operatorname{sgn}(x_1 - x_3)\} \{\operatorname{sgn}(y_2 - y_3)\} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \mu_{x|y_2} & x_3 \\ \mu_{y|x_1} & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ \cdot f_1(x_1) f_2(y_2) f(x, y) dx_1 dy_2 dx dy$$

と表現されるからである。

従って、(3.1)、(3.2) 及び (3.3) 式によって、

$$(3.4) \quad G_{10} = \frac{\Delta_{10}}{2\mu_x \mu_y}, \quad G_{11} = \frac{\Delta_{11}}{2\mu_y}, \quad G_{12} = \frac{\Delta_{12}}{2\mu_x}; \\ G_{20} = \frac{\Delta_{20}}{2\mu_x \mu_y}, \quad G_{21} = \frac{\Delta_{21}}{2\mu_y}, \quad G_{22} = \frac{\Delta_{22}}{2\mu_x}; \\ G_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{4\mu_x \mu_y}$$

と規定される相対的ベクトル積率についても同様な機能が予想される。

実際に、定義 1 の集団構造に対して (3.1)–(3.3) 式によって構成される集中統計量が記述力をもっていることは、既に (I) に示された通りである。本稿においては、定義 2 の非線形集団構造に対して、(3.4) 式によって構成される集中統計量が適していることを示すのが目的である。

定義 2 の定弾力性構造を示す典型的な分布として、多変量の所得分布を挙げることができる。この集団構造をもつ所得分布は、理論的にはジブラ分布とパレート分布によって代表されるといい、両者は共に (2.14) 式のパターンを示し、又、 x 及び y を対数変換すると、(2.6) 式のパターンを取ることに於いて共通している。

しかしながら、今、(2.12) 式で定義した y の x に関する弾力性係数を η_1 とし、対数線形回帰係数を β'_1 とした時、ジブラ分布が

$$(3.5) \quad \eta_1 = \beta'_1$$

を満すのに対して、パレート分布においては一般に、

$$(3.6) \quad \eta_1 \neq \beta'_1$$

となる点において対立している。

もし、(3.5) 式が成立する場合は、北欧学派やインド学派が行った従来通りの方式に従って、 η_1 の測定を、本来的に線形回帰に属する β'_1 の測定で代替することができる。それに対して、(3.6) 式の関係が一般的である場合は、本格的な非線形構造として η_1 の固有の測定方式を考案せねばならない。従って、当初は両者を個別に解析することが必要であろう。

(1) ジブラ所得分布の集中解析 (田口 (1984), pp. 161–166 参照):

x, y に関する二変量のジブラ分布 $f(x, y)$ を

$$(3.7) \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{(\log x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(\log x - \mu_x)(\log y - \mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\log y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} \right], \\ x \geq 0, y \geq 0, -\infty < \mu_x, \mu_y < \infty, \sigma_x \geq 0, \sigma_y \geq 0, -1 \leq \rho \leq 1$$

とする. ここで, σ_x^2, σ_y^2 及び ρ はそれぞれ $\log x, \log y$ の分散及びその間の相関係数を表わす. 又, この分布における y の x に関する回帰関数は

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mu_{y|x} &= \gamma_1 x^{\eta_1}; \quad \gamma_1 = \exp \left\{ \mu_y - \mu_x \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \sigma_y^2 \right\} \\ \eta_1 &= \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \end{aligned}$$

である. 一方, $\log y$ の $\log x$ に関する線形回帰は

$$(3.9) \quad E(\log Y | X = x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\log x - \mu_x)$$

となる. 従って, この分布においては,

$$(3.10) \quad \eta_1 = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

が y の x に関する弾力性係数であり, それは同時に対数線形回帰係数 β'_1 を与えている.

一方, (3.7) 式に関する相対ベクトル積率は, 正規分布の標準形 $\Phi(x)$ を用いて次の諸式で表現される. すなわち,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} G_{10} &= 2\Phi\{(\eta_1 - 1)\sigma_x/\sqrt{2}\} - 1; \quad \eta_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ G_{11} &= 1 - 2\Phi(\rho\sigma_y/\sqrt{2}), \quad G_{12} = 2\Phi(\sigma_x/\sqrt{2}) - 1 \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} G_{20} &= 2\Phi\{(\eta_2 - 1)\sigma_y/\sqrt{2}\} - 1; \quad \eta_2 = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \\ G_{21} &= 2\Phi(\sigma_y/\sqrt{2}) - 1, \quad G_{22} = 1 - 2\Phi(\rho\sigma_x/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(Taguchi (1988a), p. 318 参照)* 及び

$$(3.13) \quad \begin{aligned} G_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v - \rho\sigma_x) \Phi(\rho v / \sqrt{2 - \rho^2}) d\Phi(v - \sigma_y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u - \rho\sigma_y) \Phi(\rho u / \sqrt{2 - \rho^2}) d\Phi(u - \sigma_x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi((\rho v - \sigma_x)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(v - \sigma_y) d\Phi(v) \right. \\ &\quad \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi((\rho u - \sigma_y)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(u - \sigma_x) d\Phi(u) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\rho(v - \sigma_y)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(v - \rho\sigma_x) d\Phi(v) \right. \\ &\quad \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\rho(u - \sigma_x)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(u - \rho\sigma_y) d\Phi(u) \right\} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi((\rho u - \sigma_y)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(u) d\Phi(u - \sigma_x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi((\rho v - \sigma_x)/\sqrt{2 - \rho^2}) \Phi(v) d\Phi(v - \sigma_y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{G_{10} + G_{11} + G_{12}\} + \frac{1}{2} \{G_{20} + G_{21} + G_{22}\} \end{aligned}$$

* γ_1 はスケールパラメータに当たるので, その近似値は x, y に関する集中曲面の特性によっては直接得られない. γ は $\sum_{i=1}^n y_i / \sum_{i=1}^n x_i^{\eta_1}$ によって近似される.

である (上掲書, p. 325 参照).

さて, (3.11)-(3.13) 式の相対ベクトル積率から, データ解析上, 有効な統計量を構成しようとする場合に, 我々は次のような経験的事実を無視することができない. すなわち,

- (i) 家計簿統計や法人企業統計等の経済統計に関するデータ解析においては, $|\rho|$ は勿論であるが, σ_x, σ_y や $|\beta_1|, |\beta_2|$ についても, その多くは 1.5 より小なる値を示すこと.
- (ii) もしそれらが 1.5 を越える場合も, 2 を越える例は極めて稀であること.

である. 我々のこれまでのかなり長期にわたる解析例においても, 特に (ii) の例は極めて少なかった (これに関しては, 又, 後に独立したデータ解析を示す予定である). 以上のことは諸外国においても同様と思われる. 例えば Aitchison and Brown (1957) において, σ_x はすべて 1 以下として扱われていることは注目に値する. 従って, 以下においては, 当初,

$$(3.14) \quad \sigma_x, \sigma_y < 1$$

及び

$$(3.15) \quad |\eta_1 - 1| \sigma_x, |\eta_2 - 1| \sigma_y < 1$$

と仮定する. この時, (3.11) 式は $\Phi(x)$ の原点におけるマクローリン展開

$$(3.16) \quad \Phi(x) = \Phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^3}{6\sqrt{2\pi}} + O(x^4)$$

によって次のように表現される. すなわち,

$$(3.17) \quad \begin{aligned} G_{10} &= \frac{\eta_1 - 1}{\sqrt{\pi}} \sigma_x - \frac{(\eta_1 - 1)^3 \sigma_x^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_x^4) \\ G_{11} &= -\frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \sigma_y + \frac{\rho^3 \sigma_y^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_y^4) \\ G_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_x - \frac{\sigma_x^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_x^4) \\ G_{10} + G_{11} + G_{12} &= \frac{\eta_1(\eta_1 - 1) \sigma_x^3}{4\sqrt{\pi}} + O\left(\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

及び

$$(3.18) \quad \begin{aligned} G_{20} &= \frac{\eta_2 - 1}{\sqrt{\pi}} \sigma_y - \frac{(\eta_2 - 1)^3 \sigma_y^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_y^4) \\ G_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_y - \frac{\sigma_y^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_y^4) \\ G_{22} &= -\frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \sigma_x + \frac{\rho^3 \sigma_x^3}{12\sqrt{\pi}} + O(\sigma_x^4) \\ G_{20} + G_{21} + G_{22} &= \frac{\eta_2(\eta_2 - 1) \sigma_y^3}{4\sqrt{\pi}} + O\left(\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

が成立する.

(3.13) 式については, 若干複雑であり, その第一項について考える時, まず $\Phi(v - \rho\sigma_x)$ 及び $\Phi(v - \sigma_y)$ 等を v についてテイラー展開せねばならない. 今, σ_x, σ_y 等が十分小であるとすれば, 第一項の積分は

$$(3.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v - \rho\sigma_x) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2 - \rho^2}}\right) d\Phi(v - \sigma_y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) d\Phi(v) - \rho \sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) d\Phi(v) \\
&\quad - \sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi''(v) dv + \frac{\rho^2 \sigma_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi''(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) d\Phi(v) \\
&\quad + \rho \sigma_x \sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi''(v) dv \\
&\quad + \frac{\sigma_y^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v) \Phi\left(\frac{\rho v}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'''(v) dv + O\left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}}^3\right)
\end{aligned}$$

で表わされる。第二項以下についても同様な展開を行うと、相殺項が生じて、結局、 G_{xy} は、

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad G_{xy} &= -\rho(\sigma_x + \sigma_y) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(u) \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) d\Phi(u) \\
&\quad + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \\
&\quad + \frac{\rho^2}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi''(u) \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) d\Phi(u) \\
&\quad + 2\rho\sigma_x\sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'(u) \Phi''(u) du \\
&\quad + \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'''(u) du \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi''\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \\
&\quad - \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) \Phi''(u) du \\
&\quad - \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) \Phi'''(u) du \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \right. \\
&\quad \quad - (\sigma_x + \sigma_y) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad + \frac{\rho(\sigma_x + \sigma_y)}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad + \rho(\sigma_x + \sigma_y) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad + \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2-\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi''\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad + \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi''(u) d\Phi(u) \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\rho^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2-\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi''\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi(u) d\Phi(u) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\rho^2\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi'(u) d\Phi(u) \\
& -\frac{\rho^2}{2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \Phi''(u) d\Phi(u) \Big] \\
& + O\left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}}\right)
\end{aligned}$$

となる(計算の詳細は, 田口(1988b)参照). 上式において $\Phi'''(u)$ を含む項は相殺されるから,

$$(3.21) \quad \Phi'(u) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Phi''(x) = \frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

を考慮して, 更に, 原点におけるマクローリン展開(3.16)式を用いて整理すると, G_{xy} は終局的に,

$$(3.22) \quad G_{xy} = \frac{3(1-\rho^2)}{2\pi\sqrt{4-\rho^2}} \sigma_x\sigma_y + O\left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}}\right)^3$$

となる.

以上, (3.17), (3.18) 及び (3.22) 式の諸結果から, 少なくとも σ_x 及び σ_y が十分小である時, 我々は次のような近似的結果が得られると予想できるのである. すなわち,

$$(3.23) \quad G_{12} \doteq \frac{\sigma_x}{\sqrt{\pi}}, \quad G_{21} \doteq \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}}$$

$$(3.24) \quad -\frac{G_{11}}{G_{21}}, \quad -\frac{G_{22}}{G_{12}} \doteq \rho$$

$$(3.25) \quad \begin{aligned} & -\frac{G_{11}}{G_{12}}, \quad 1 + \frac{G_{10}}{G_{12}} \doteq \beta'_1 \\ & -\frac{G_{22}}{G_{21}}, \quad 1 + \frac{G_{20}}{G_{21}} \doteq \beta'_2 \end{aligned}$$

及び

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{G_{21}}{G_{12}} G_{xy} & \doteq \frac{\sigma_y^2}{\pi} (1-\rho^2) = G_{21}(1-\rho^2) \\ \frac{4}{3} \frac{G_{12}}{G_{21}} G_{xy} & \doteq \frac{\sigma_x^2}{\pi} (1-\rho^2) = G_{12}(1-\rho^2) \end{aligned}$$

である.

一方, $\beta_1 \neq 1$ の時は,

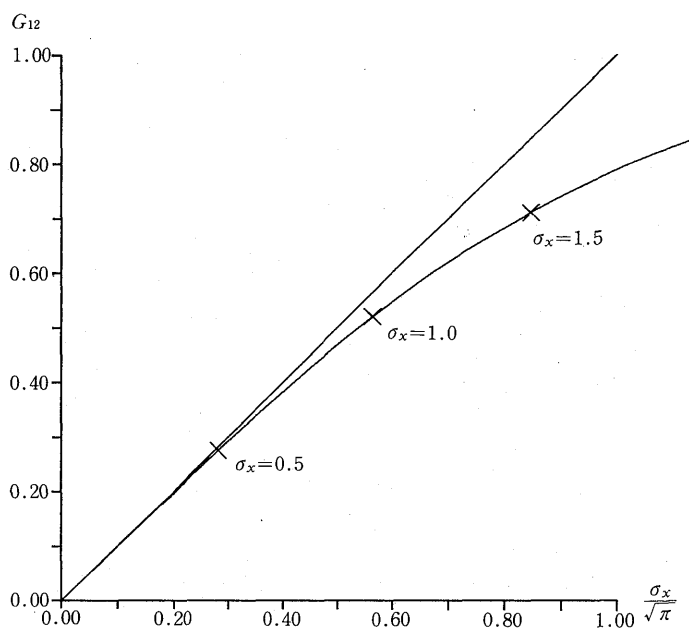
$$(3.27) \quad G_{10} + G_{11} + G_{12} \neq 0$$

が近似的に得られる.

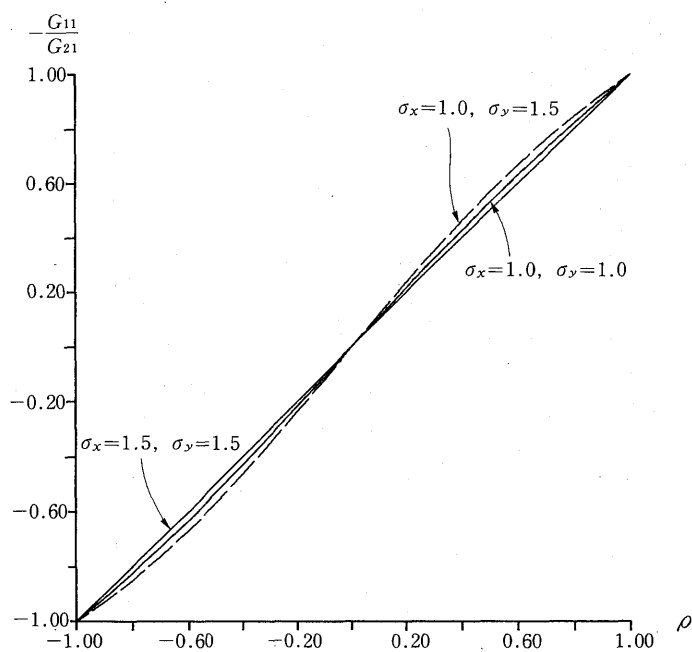
(3.23)-(3.27) 式の左辺に示される諸式は, いずれも相対ベクトル積率に基づく集中統計量であって, それらの役割は右辺に示される諸パラメータのもつ意義によって明らかである.

因みに, (3.22) 式における $O\left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}}\right)^3$ の項は, σ_x, σ_y に対してどの程度の制約を与えるかを正確に決定する上で重要な役割をもつが, その計算量は少なくない.

しかし, 図 1(d) に示す諸グラフから, σ_x, σ_y に対する制約はそれ程厳しくないことが理解



(a) 非線形散布度



(b) 非線形相関係数

図1. ジブラ分布における各種の集中統計量と対数線形諸係数との比較

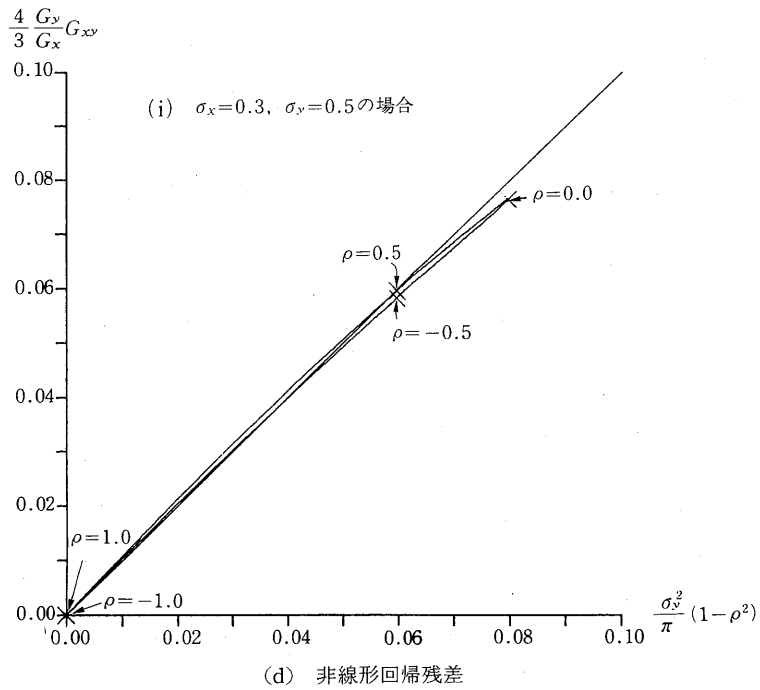
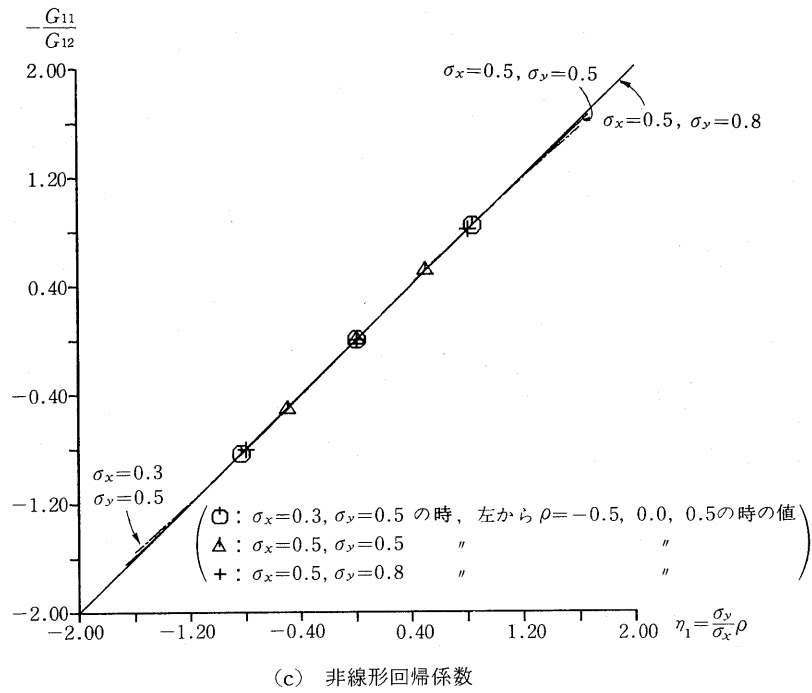


図 1. (続き)

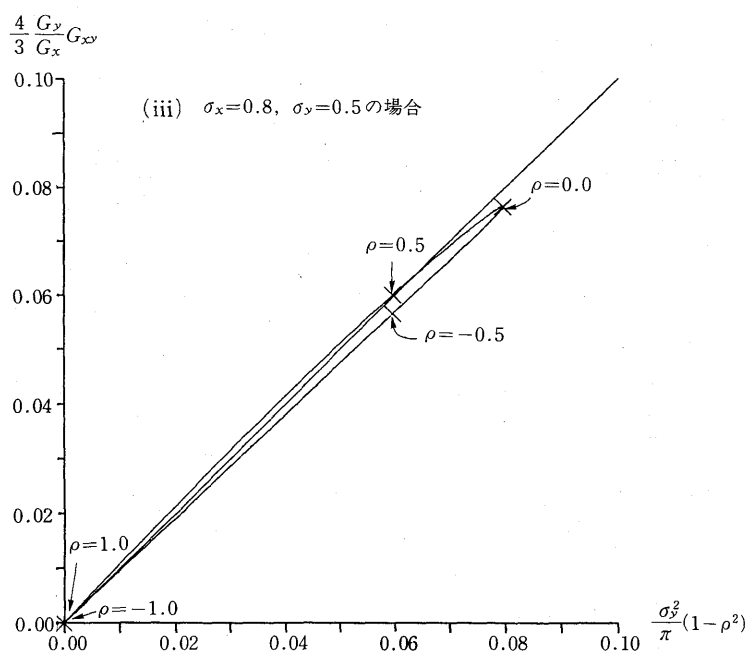
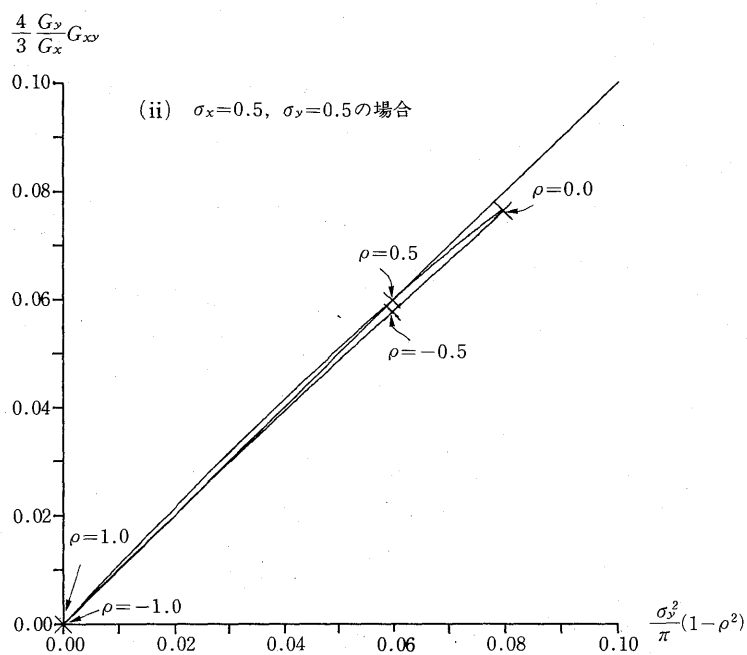


図 1. (d) (続き)

されよう.

(2) Mardia の第二種二変量パレート分布の解析:

x, y に関する Mardia の第二種パレート分布 $f(x, y; a, b, p, q, \alpha)$ を,

$$(3.28) \quad f(x, y; a, b, p, q, \alpha) = \frac{pq}{(1-\alpha)xy} \left[\left(\frac{a}{x} \right)^p \left(\frac{b}{y} \right)^q \right]^{1/(1-\alpha)} \\ \times I_0 \left[\frac{2[\alpha pq \{\log(x/a)\} \cdot \{\log(y/b)\}]}{1-\alpha} \right], \\ x > a > 0, y > b > 0, p > 0, q > 0, 0 \leq \alpha \leq 1$$

とする. この時, $1/p^2, 1/q^2$ 及び α は, それぞれ $\log x, \log y$ の分散及び $\log x, \log y$ 間の相関係数を表わす.

又, この分布において, y の x に関する回帰関数は,

$$(3.29) \quad \mu_{y|x} = \frac{qb}{q-1+\alpha} \left(\frac{x}{a} \right)^{\eta_1}; \quad \eta_1 = \frac{\alpha p}{q-1+\alpha}$$

である. 一方, $\log y$ の $\log x$ に関する線形回帰は

$$(3.30) \quad E(\log Y | X=x) = \log b + \beta'_1(\log x - \log a); \quad \beta'_1 = \alpha \frac{p}{q}$$

である. 従って, この場合, 弾力性係数 η_1 と, 対数線形回帰係数 β'_1 は, $\alpha=1$ の場合を除き, 一般に, 一致しない.

さて, (3.28) 式に関するベクトル積率は, 田口 (1983, 1984) の解析にみられるように,

$$(3.31) \quad p > 1, q > 1$$

の時に存在する. 又, この時, x の y に関する回帰関数は,

$$(3.32) \quad \mu_{x|y} = \frac{pa}{p-1+\alpha} \left(\frac{y}{b} \right)^{\eta_2}; \quad \eta_2 = \frac{\alpha q}{p-1+\alpha}$$

であることを考察すると,

$$(3.33) \quad G_{10} = \frac{2(p-1)}{2p-1-\eta_1} - 1 = \frac{\eta_1-1}{2p-1-\eta_1} \\ G_{11} = -\frac{\alpha}{2(q-1)+\alpha} \\ G_{12} = \frac{1}{2p-1}$$

及び

$$(3.34) \quad G_{20} = \frac{2(q-1)}{2q-1-\eta_2} - 1 = \frac{\eta_2-1}{2q-1-\eta_2} \\ G_{21} = \frac{1}{2q-1} \\ G_{22} = -\frac{\alpha}{2(p-1)+\alpha}$$

が得られる. 更に,

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad G_{xy} = & -\frac{(p-1+\alpha)(q-1+\alpha)}{\{2(p-1)+\alpha\}\{2(q-1)+\alpha\}-\alpha(p-1)(q-1)} \\
 & + \frac{(p-1)(q-1+\alpha)}{2p(q-1+\alpha)+(2-\alpha)\{(p-1)(q-1)-\alpha\}} \\
 & + \frac{(q-1)(p-1+\alpha)}{2q(p-1+\alpha)+(2-\alpha)\{(p-1)(q-1)-\alpha\}} \\
 & + \frac{-pq+p+q}{(2p-1)(2q-1)-\alpha(p-1)(q-1)} \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(p-1)\alpha-(q-1)}{(2p-1)(q-1)+(p-1)\alpha} - \frac{\alpha}{2(q-1)+\alpha} + \frac{1}{2p-1} \right. \\
 & \left. + \frac{(q-1)\alpha-(p-1)}{(2q-1)(p-1)+(q-1)\alpha} - \frac{\alpha}{2(p-1)+\alpha} + \frac{1}{2q-1} \right\}
 \end{aligned}$$

を得ることができる (Taguchi (1988a), p. 318 及び p. 324 参照).

以上のような各種の相対ベクトル積率に基づいて各種の集中統計量を構成し、ジブラ分布の場合と同様な解析を試みることにしよう. この時, $1/p, 1/q$ が十分小であれば, 従って, $G_{12}(=G_x)$ 及び $G_{21}(=G_y)$ が十分小であれば, 二項展開法を反復適用することによって, 容易に次式が得られる. すなわち,

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & -\frac{G_{11}}{G_{21}} = \alpha \{1 + (1-\alpha)G_{21} + (1-\alpha)^2 G_{21}^2 + O(G_{21}^3)\}, \\
 & -\frac{G_{11}}{G_{12}} = \eta_1 \left\{ 1 + \frac{\eta_1-1}{2p} + \frac{\eta_1(\eta_1-1)}{4p^2} + \frac{\eta_1^2(\eta_1-1)}{8p^3} + O(G_{12}^4) \right\} \\
 & = \eta_1 \{1 + (\eta_1-1)G_{12} + (\eta_1-1)^2 G_{12}^2 + (\eta_1-1)^3 G_{12}^3 + O(G_{12}^4)\}, \\
 & 1 + \frac{G_{10}}{G_{12}} = \eta_1 \{1 + (\eta_1-1)G_{12} + \eta_1(\eta_1-1)G_{12}^2 + \eta_1^2(\eta_1-1)G_{12}^3 + O(G_{12}^4)\}, \\
 & G_{10} + G_{11} + G_{12} = G_{12}\eta_1(\eta_1-1) \{G_{12}^2 + (2\eta_1-1)G_{12}^3 + O(G_{12}^4)\}, \\
 & \frac{G_{10} + G_{11} + G_{12}}{G_{12}^3} = \eta_1(\eta_1-1) \{1 + (2\eta_1-1)G_{12}\} + O(G_{12}^2)
 \end{aligned}$$

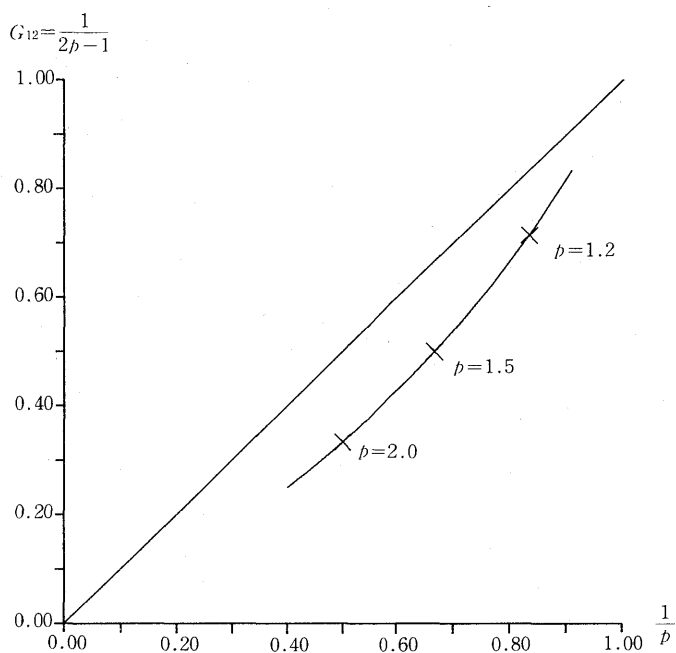
及び

$$\begin{aligned}
 (3.37) \quad & -\frac{G_{21}}{G_{12}} = \alpha \{1 + (1-\alpha)G_{12} + (1-\alpha^2)G_{12}^2 + O(G_{12}^3)\}, \\
 & -\frac{G_{22}}{G_{21}} = \eta_2 \left\{ 1 + \frac{\eta_2-1}{2q} + \frac{\eta_2(\eta_2-1)}{4q^2} + \frac{\eta_2^2(\eta_2-1)}{8q^3} + O(G_{21}^4) \right\} \\
 & = \eta_2 \{1 + (\eta_2-1)G_{21} + (\eta_2-1)^2 G_{21}^2 + (\eta_2-1)^3 G_{21}^3 + O(G_{21}^4)\}, \\
 & 1 + \frac{G_{20}}{G_{21}} = \eta_2 \{1 + (\eta_2-1)G_{21} + \eta_2(\eta_2-1)G_{21}^2 + \eta_2^2(\eta_2-1)G_{21}^3 + O(G_{21}^4)\}, \\
 & G_{20} + G_{21} + G_{22} = G_{21}\eta_2(\eta_2-1) \{G_{21}^2 + (2\eta_2-1)G_{21}^3 + O(G_{21}^4)\}, \\
 & \frac{G_{20} + G_{21} + G_{22}}{G_{21}^3} = \eta_2(\eta_2-1) \{1 + (2\eta_2-1)G_{21}\} + O(G_{21}^2)
 \end{aligned}$$

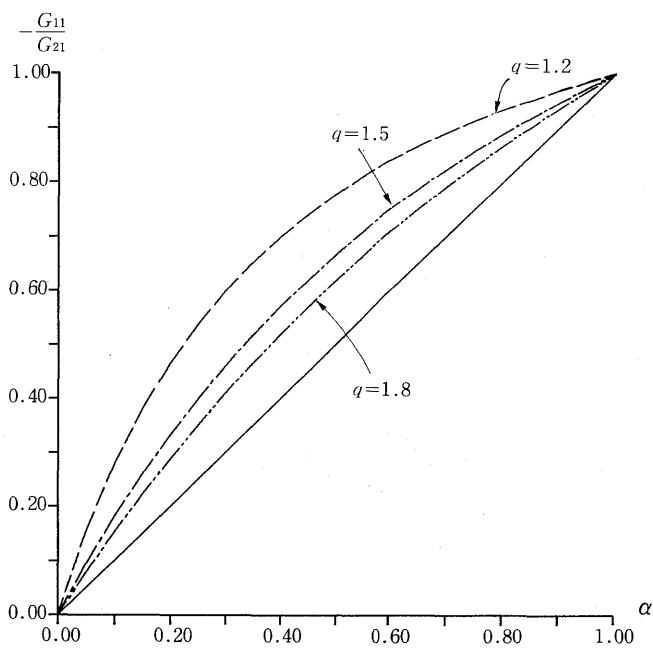
が成立する.

一方, (3.35) 式に関しては, その各項の分子, 分母を p, q で約分して,

$$(3.38) \quad G_{xy} = -\frac{(1-(1-\alpha)/q)(1-(1-\alpha)/q)}{4(1-(2-\alpha)/2p)(1-(2-\alpha)/2q)-\alpha(1-1/p)(1-1/q)}$$



(a) 非線形散布度



(b) 非線形相関係数

図2. パレート分布における各種の集中統計量と対数線形諸係数との比較

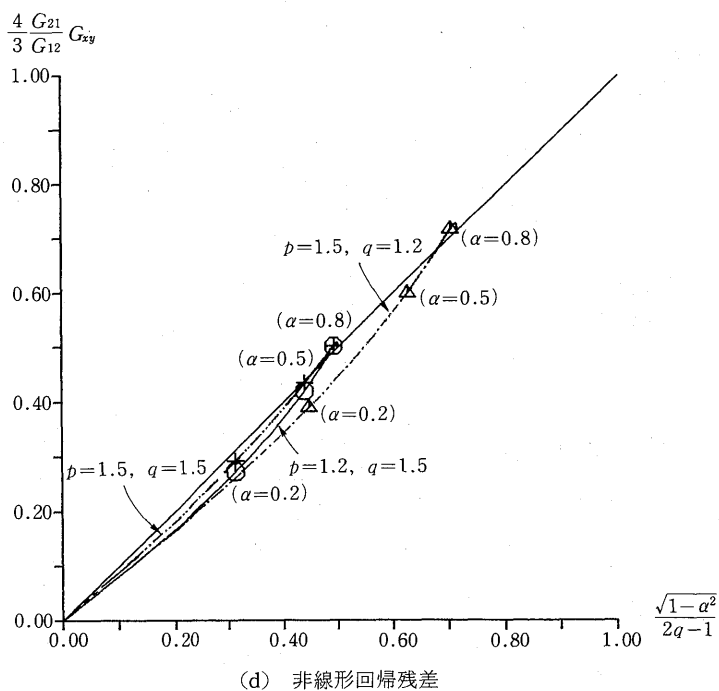
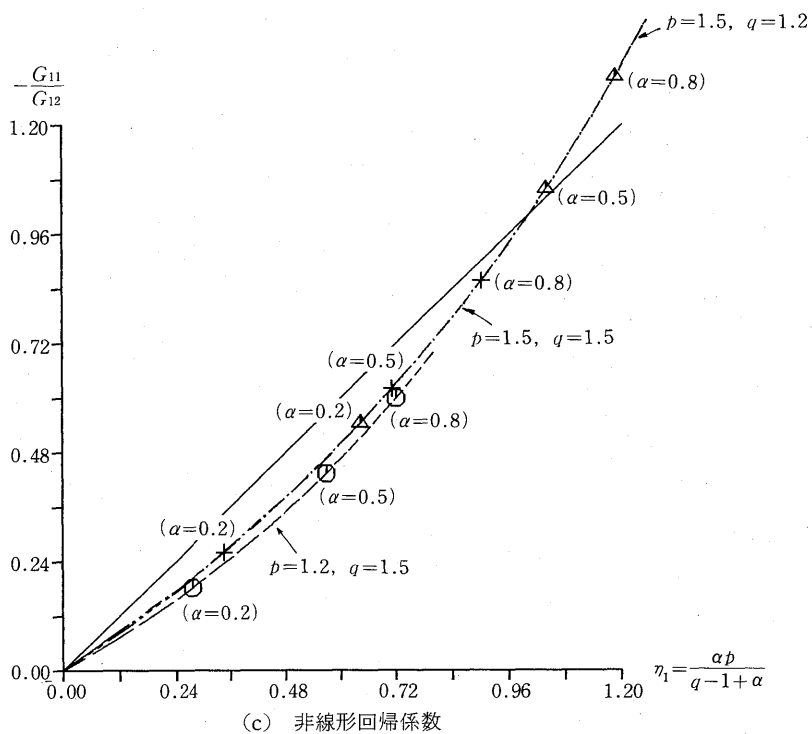


図2. (続き)

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-1/p)(1-(1-\alpha)/q)}{2(1-(1-\alpha)/q) + (2-\alpha)\{(1-1/p)(1-1/q) - \alpha/pq\}} \\
& + \frac{(1-1/q)(1-(1-\alpha)/p)}{2(1-(1-\alpha)/p) + (2-\alpha)\{(1-1/p)(1-1/q) - \alpha/pq\}} \\
& + \frac{-1+1/p+1/q}{4(1-1/2p)(1-1/2q) - \alpha(1-1/p)(1-1/q)} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\alpha/q)(1-1/p) - (1/p)(1-1/q)}{2(1-1/2p)(1-1/q) + (\alpha/q)(1-1/p)} - \frac{\alpha/q}{2(1-1/q) + \alpha/q} \right. \\
& + \frac{1}{2p(1-1/2p)} + \frac{(\alpha/p)(1-1/q) - (1/q)(1-1/p)}{2(1-1/2q)(1-1/p) + (\alpha/p)(1-1/q)} \\
& \left. - \frac{\alpha/p}{2(1-1/p) + \alpha/p} + \frac{1}{2q(1-1/2q)} \right\}
\end{aligned}$$

とすることができる。ここで x, y に関する対数分散 $1/p^2, 1/q^2$ が十分小であれば、分子、分母における二項形式を展開することにより、終局的に、

$$(3.39) \quad G_{xy} = \frac{1-\alpha^2}{(4-\alpha)^3} \frac{1}{pq} \{12+3\alpha-4\alpha^2+\alpha^3\} + O\left\{\left(\frac{p^{-1}+q^{-1}}{2}\right)^3\right\}$$

が得られる (計算の詳細は、田口 (1988b) 参照)。従って、 α がさほど大でない場合は近似式として、

$$(3.40) \quad G_{xy} \doteq \frac{3(1-\alpha^2)}{16} \frac{1}{pq}$$

を用いることができる。更に、 p, q が十分大であれば

$$(3.41) \quad G_{xy} \doteq \frac{3(1-\alpha^2)}{4} G_x G_y$$

を近似式とすることができる。これによって、又、

$$(3.42) \quad \frac{4}{3} \frac{G_y}{G_x} G_{xy} \doteq (1-\alpha^2) G_y^2$$

は回帰残差の相対的尺度を与えることになる。以上の諸結果の近似精度は図 2 の各グラフの示す通りである。

4. 非線形構造を記述する集中統計量のシステム

第 3 節において、当初、一般的観点の下で、相対ベクトル積率が、集団構造の記述の上で適切であることを示した。次いで、非線形構造をもつ代表的分布について、相対ベクトル積率によって構成される一定の形式の集中統計量が、その分布のパラメータや基本的な対数線形構造指標のよい近似を与えることを示した。

その近似精度は、対象とする分布の対数分散に依存し、それらが 1 を越えないという制約を加えるものであったが、実際にはどの程度の精度が制約外で保たれるかを図 3 に示す。

一般的に、対数変換を加えた前稿 (I) の線形構造諸指標が、常により非線形構造諸指標を与えるとはいえないことは、既に述べた通りである。しかしながら、これらの指標が、なんらかの程度において非線形構造を反映していることも否めない事実であろう。従って、より適切な非線形構造の記述系が存在するとすれば、それは上述の対数線形構造諸指標と、ある程度の相

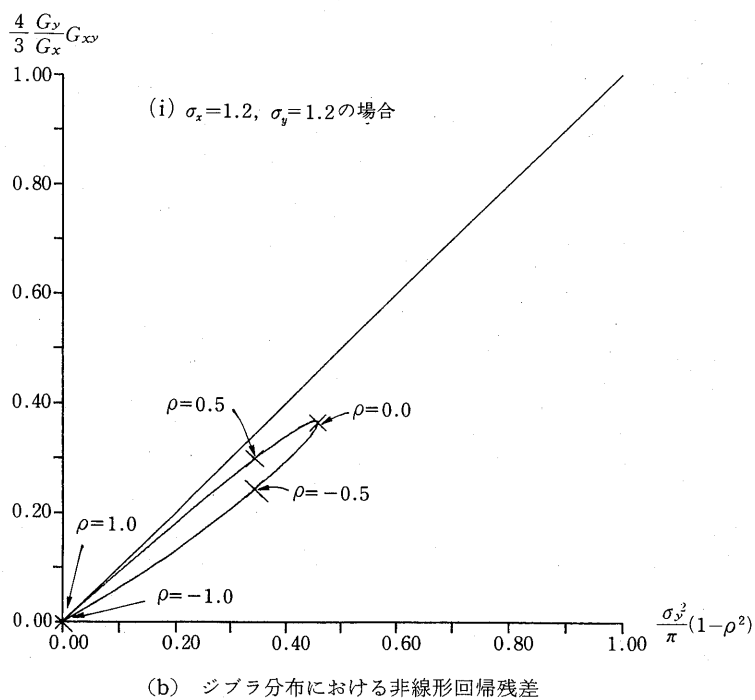
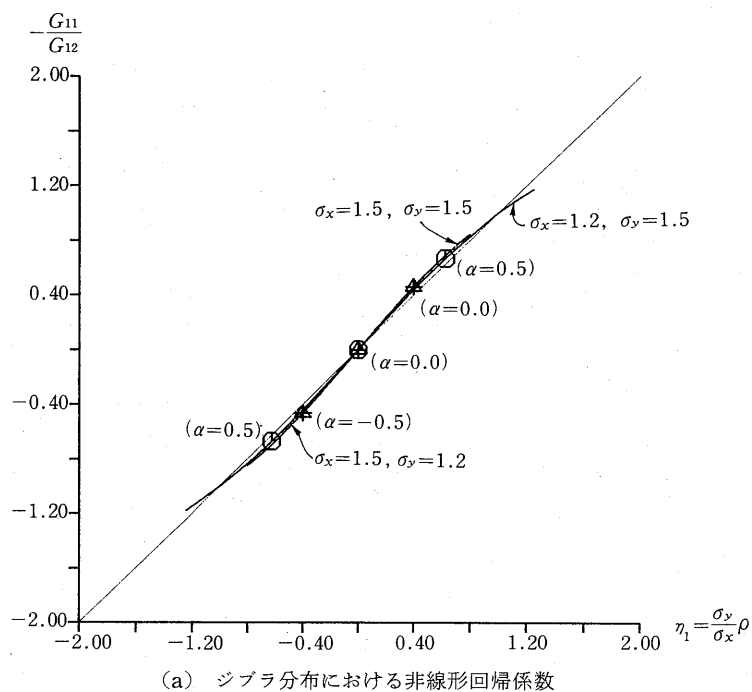


図 3.

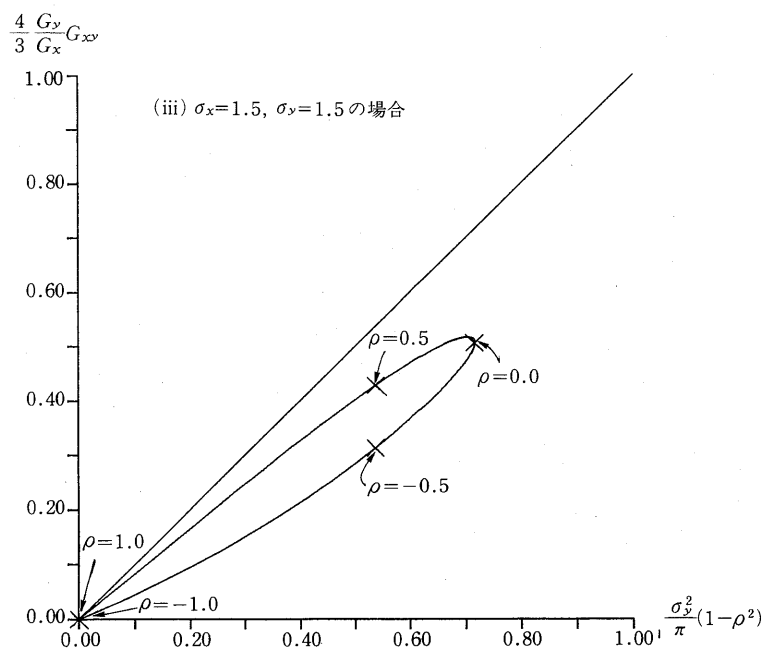
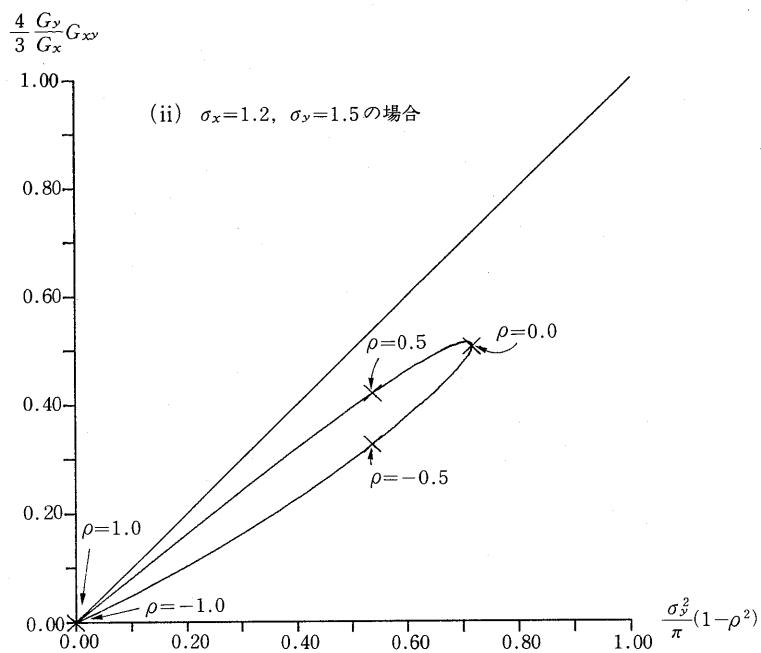


図 3. (b) (続き)

表1. 非線形構造に対するベクトル積率の記述統計量

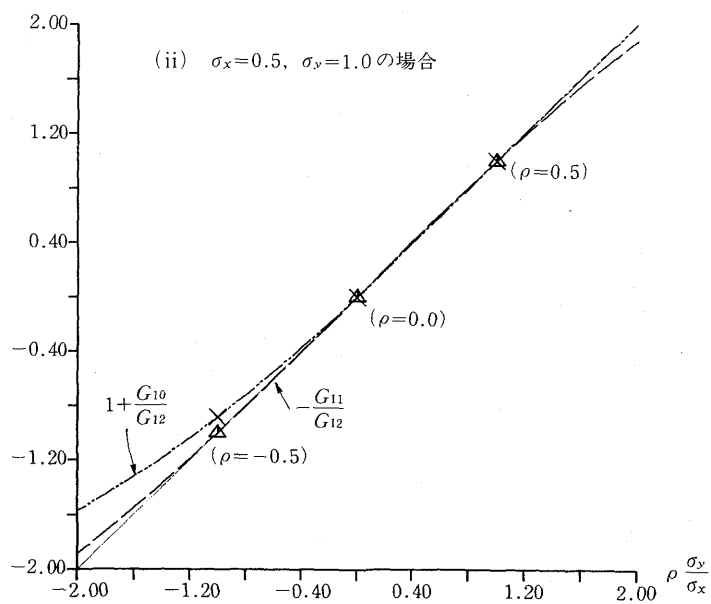
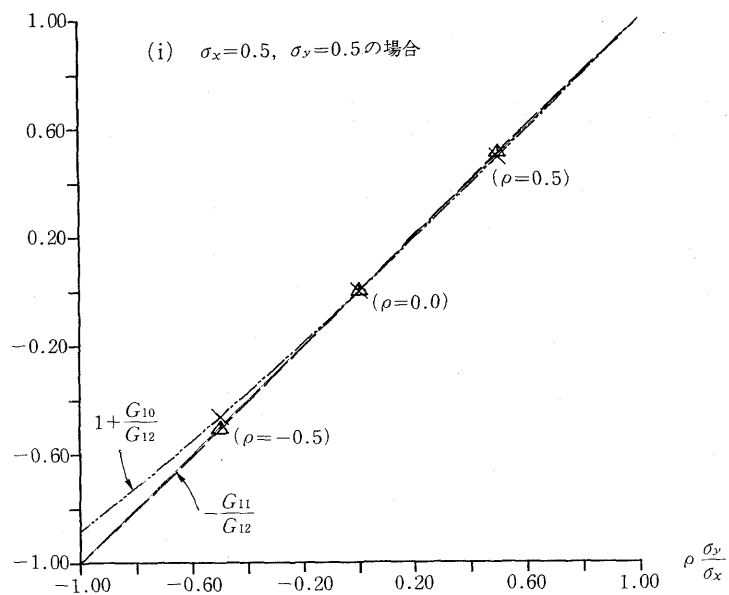
集中統計量の種類	集 団 構 造 に 対 す る 機 能	
	一 般 的 性 格	事 例 的 性 格
(1) $G_{12} = G_x, G_{21} = G_y$	非線形散布度を与える.	ジブラ係数 σ_x, σ_y 及びバレート係数 p, q によってそれぞれ, $\sigma_x/\sqrt{\pi}, \sigma_y/\sqrt{\pi}$ 及び $1/(2p-1), 1/(2q-1)$ と表わされる.
(2) $-G_{11}/G_{21}, -G_{22}/G_{12}$	非線形相関係数を与える. (相互依存係数)	ジブラ分布及びバレート分布に対し, 対数線形相関係数 ρ, α に近似的に等しい.
(3) $-G_{11}/G_{12}, -G_{22}/G_{21}$	弾力性係数 η_1, η_2 の第一種近似値を与える.	ジブラ分布及びバレート分布に対し, その弾力性係数をよく近似する.
(4) $1+G_{10}/G_{12}, 1+G_{20}/G_{21}$	弾力性係数 η_1, η_2 の第二種近似値を与える.	
(5) $\frac{4}{3}G_{xy}$	二変量の相対的散布度を与える.	ジブラ分布に対し, $\frac{4}{3} \frac{G_y}{G_x} G_{xy} = \sigma_y^2(1-\rho'^2)/\pi\sqrt{1-\rho'^2/4}$ $\approx G_y^2(1-\rho'^2).$ バレート分布に対しても近似的に $(1-\alpha^2)G_y^2$ となる. つまり G_x が十分小ならば, 共に対数線形回帰残差にほぼ比例する. (X, Y) の正值分布に対しては $0 \leq G_{xy} \leq 1$
(6) $\frac{4}{3} \frac{G_y}{G_x} G_{xy}, \frac{4}{3} \frac{G_x}{G_y} G_{xy}$	定弾力性回帰残差の相対的尺度を与える.	
(7) $\frac{4}{3} \frac{G_{xy}}{G_x G_y}$	相対的多様性又は不確実性指標を与える. (相対的多様性又は不確実性係数)	
(8) $G_{10} + G_{11} + G_{12} \neq 0$	非線形回帰条件を与える.	
(9) $-(G_{10} + G_{11} + G_{12})/G_{12}^2$	弾力性指標を与える.	$\begin{cases} \eta_1 > 1 \text{ の時} & (9) < 0 \\ \eta_1 = 0 \text{ 及び } 1 \text{ の時} & (9) = 0 \\ 0 < \eta_1 < 1 \text{ の時} & (9) > 0 \end{cases}$

関関係,あるいは近似的比例的関係を成立させるであろう.その意味で第3節の(3.23)–(3.27)式の左辺に示す諸集中統計量は,図1及び3に照しても,非線形構造の自律した記述系を形成するように思われる.勿論,このシステムの有効範囲の確定については,今後更に多くの理論的及び経験的な検討を重ねる必要がある.従って,表1に示す結果は,本稿の諸検討の集積であると共に,今後の検討のための一つの予想でもある.この表は前稿(I)の表3と,ほぼ完全な対応を示している.

しかしながら,我々は,非線形構造に関する一つの自律した記述系を呈示するのみで満足する訳ではない.この記述系が,従来の対数変換記述系よりも優れていることを指摘せねばならない.そのことを吟味する一つの基準は,定弾力性構造にあると我々は考える.又,その素材としては,(3.6)式の条件を満たしている点で第3節,(2)で扱ったバレート分布が適切であると思われる.

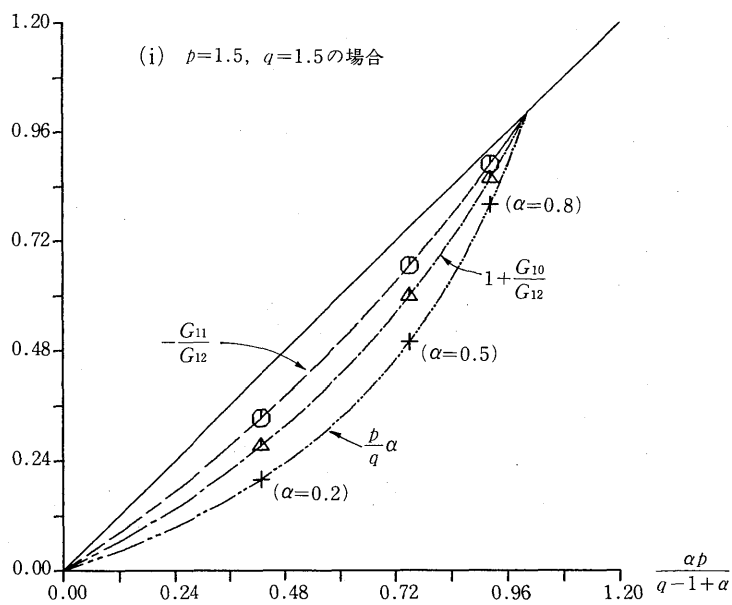
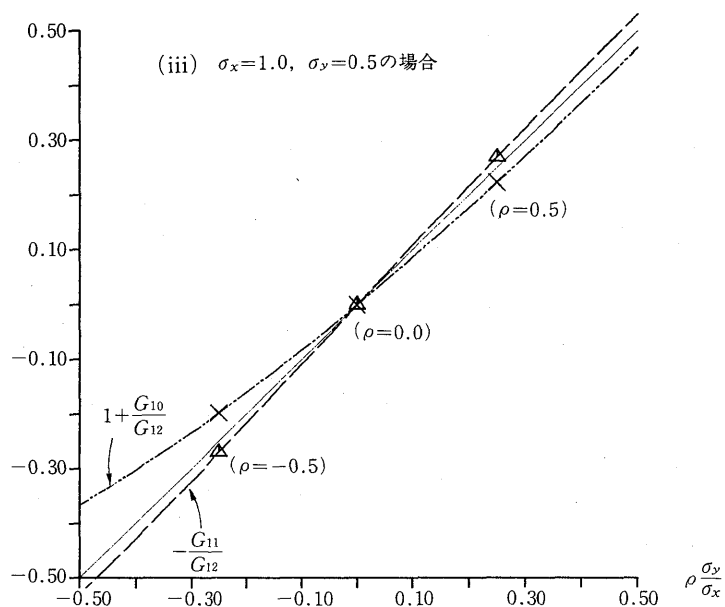
つまり,この場合は,新しい記述系による弾力性係数の第一種近似 $-\frac{G_{11}}{G_{12}}$ が,従来の記述系による弾力性係数 β'_1 に比較して,より真の弾性値 $\eta_1 = \frac{\alpha p}{q-1+\alpha}$ に接近しているかどうかによって直接有効性が決定されるからである.その結果は図4に示す通りであり,ほぼ期待に応えるものといえそうである.

以上によって,弾力性係数に焦点を絞る限り,我々は相対的ベクトル積率を基準とした表1の



(a) ジブラ分布における回帰係数の適合

図 4.



(b) パレート分布における回帰係数の適合

図4. (続き)

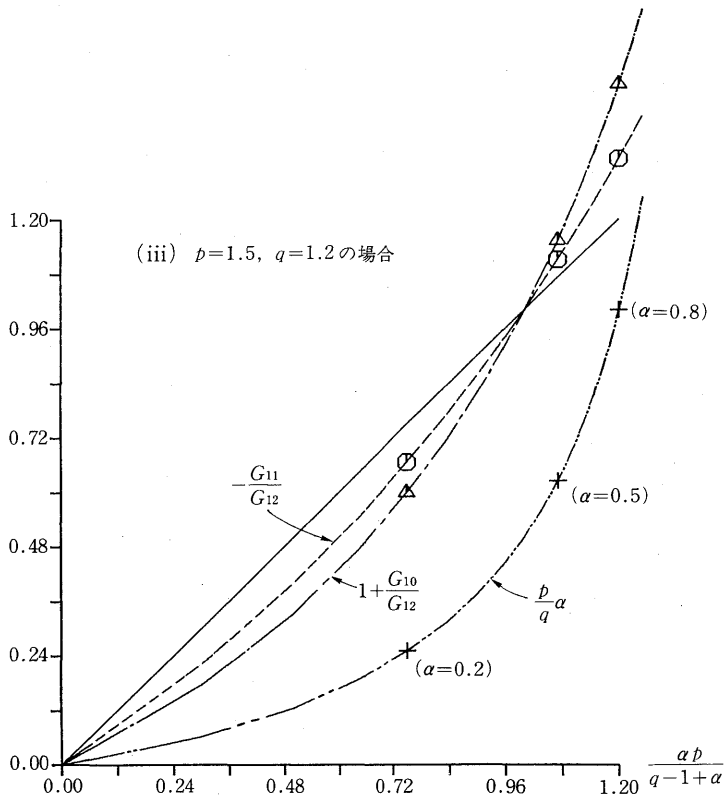
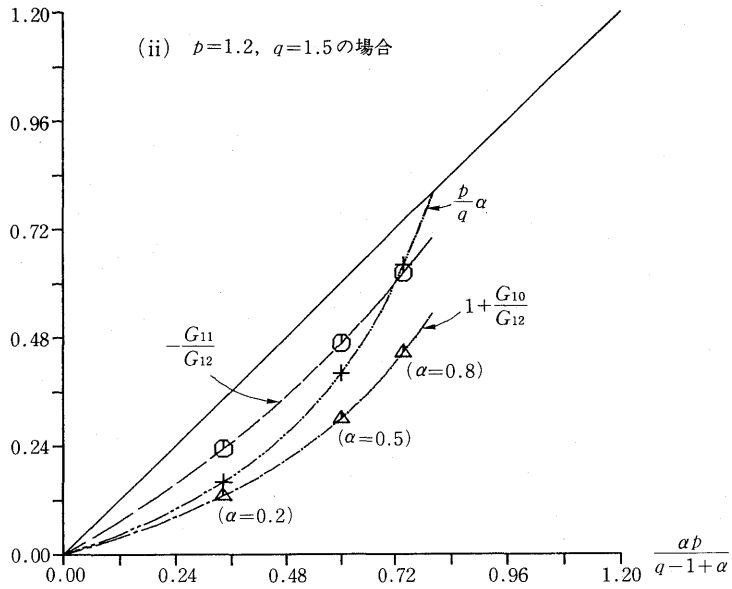


図 4. (b) (続き)

記述系に非線形構造解析上の意義を認めざるを得ない。この記述系は構造統計表の利用に則したものであり、対数変換による精度の低下を防ぐことにもなる。図4は更に、 η_1 に対する第一種近似 $-\frac{G_{11}}{G_{12}}$ は、その第二種近似 $1+\frac{G_{10}}{G_{12}}$ より、一般的に精度が高いことを示している。

5. 結び

非線形構造の解析を、特に弾力性係数の測定に焦点を絞って行う時、統計的集団解析は、数理・計量経済学に直結し、係数測定法はその境界領域に置かれる。この測定の精度が、直接経済計画に影響することは、既に序論で述べたように、歴史が物語っている。

弾力性係数の測定法の適否は、又、測定資料の性格に依存しており、測定結果は経験的観点からも吟味される。従って、いずれの方法が妥当であるかは、更に、既存データに照して十分に検討されねばならない。勿論、その際に、定弾力性構造モデルそのものが、所得分布モデルと共に、その適否を吟味されねばならない。このことは次稿に主題として取り上げられるべきである。

さて、相対ベクトル積率の計算は、(3.4)式の定義によると、一見ベクトル積率の計算よりも複雑にみえる。しかし、その計算は前稿(I)の表1,2で与えた構造統計表に対して、通常のベクトル積率計算を加えることに他ならない。このことは裏を返すと、構造統計表の作製のためにパーセンテージを取るという統計作業が、非線形構造の解析上、重要な意味をもつことを示している。

その単純な計算手続きは第4節で述べたように、対数を取るという複雑な操作と、同等、若しくはより効果的である。

集中解析のシステムは、経験的な統計手法に則して形成されたものであるが、その確立は逆に構造統計表の構成(階層分点の確定等)に理論的根拠を与えることができる。それは一方ではシェア分布の本質的役割を解明するものであり、他方においては官庁統計表に新たな活路を拓くことになる。それは統計学が確率論から脱皮し、独立した帰納的方向を辿ることを指示するように思われる。

結論として、ローレンツ曲線や、ジーニ係数及びその発展形式としての集中曲面や集中解析法は、本質的にシェアの機能を通して非線形構造を解析するための統計手法であり、又、そのための統計指標を与えることができる。

謝 辞

前稿に引き続き、頭初の脚注で述べた研究協力者と共に、山田晴美氏に原稿の整理、資料の作製等、全面にわたり協力を仰いだ。深く感謝する。

参 考 文 献

- Aitchison, J. and Brown, J.A.C. (1957). *The Lognormal Distribution*, Cambridge at the University Press.
- Bhattacharya, N. (1964). On some variable elasticity Engel curve forms, *Sankhyā, Ser. B*, **26**, 1-16.
- Indian Statistical Institute (ISI) (1958). *Studies on Consumer Behavior*, Indian Statistical Series No. 6, Asia Publishing House and Statistical Publishing Society.
- Iyengar, N.S. (1960a). On a method of computing the Engel elasticities from concentration curves,

- Econometrica*, **28**, 882-891.
- Iyengar, N.S. (1960b). On the standard error of the Lorenz concentration ratio, *Sankhyā, Ser. B*, **22**, 371-378.
- Iyengar, N.S. (1960c). On a problem of estimating increase in consumer demand, *Sankhyā, Ser. B*, **22**, 379-390.
- Iyengar, N.S. (1963). Estimation of quality elasticities for certain commodities from national sample survey data, *Sankhyā, Ser. B*, **23**, 15-22.
- Iyengar, N.S. (1964). A consistent method of estimating the Engel curve from grouped survey data, *Econometrica*, **32**, 591-618.
- Kakwani, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty — Methods of Estimation and Policy Applications*—, A World Bank Research Publication, Oxford University Press.
- Mahalanobis, P.C. (1960). A method of fractile graphical Analysis, *Econometrica*, **28**, 325-351.
- Mahalanobis, P.C. (1964). Statistical tools and techniques in perspective planning in India, *Sankhyā, Ser. B*, **26**, 29-45.
- Mahalanobis, P.C. (1965). Statistics for economic development, *Sankhyā, Ser. B*, **27**, 179-188.
- Mardia, K.V. (1962). Multivariate Pareto distributions, *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1008-1015.
- Taguchi, T. (1972a). On the two-dimensional concentration surface and extensions of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case I, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **24**, 355-381.
- Taguchi, T. (1972b). On the two-dimensional concentration surface and extensions of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case II, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **24**, 599-619.
- Taguchi, T. (1973). On the two-dimensional concentration surface and extensions of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case III, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 215-237.
- Taguchi, T. (1981). On a multiple Gini's coefficient and some concentrative regressions, *Metron*, **XXXIX**, N. 1-2, 69-98.
- 田口時夫(1983). 二変量パレート分布の集中解析 —構造統計量の提案—, 統計数理研究所集報, **31**, 1-32.
- 田口時夫(1984). 経済分析と多次元解析 —新しい計量空間の形成と展望—, 東洋経済新報社.
- Taguchi, T. (1988). On the structure of multivariate concentration —Some relationships among the concentration surface and two variate mean difference and regressions—, *Comput. Statist. Data Anal.*, **6**, 307-334, North-Holland, Amsterdam.
- 田口時夫(1988a). 集中多様体と集中解析のシステム (I) —ジニーの統計方法論の幾何学的展開—, 統計数理, **36**, 41-53.
- 田口時夫(1988b). 二次元集中度に関する若干の計算, 統計数理研究所 共同研究レポート 11, 研究課題番号 (62-共研-90) 及び (63-共研-88).
- Wold, H. (1953). *Demand Analysis —A study in econometrics*—, Wiley, New York.
- ウォルド, ヘルマン (1963). 需要分析, 森田優三 監訳, 春秋社.

On the Concentration Manifold and the System of Concentration Analysis (II)
—Non Linear Concentration Statistics—

Tokio Taguchi

(The Institute of Statistical Mathematics)

Succeeding the part (I) of this title, the author suggests some new fundamental statistics, called 'relative vector product moments' denoted by G_{10} , G_{11} , G_{12} ; G_{20} , G_{21} , G_{22} ; G_{xy} , etc. (see the formulae (3.2)).

He points out that these moments give us a similar system of descriptive statistics (see Table 1) to the system produced by the 'vector product moment'.

The new system is essentially non linear and it approximates the same kind of systems produced by logarithmic scalar and vector product moments. As theoretical examples, he analyses Gibrat and Pareto income distributions. Furthermore, some practical examples of analysis of empirical economic data are exhibited.