統計数理 第35巻 第1号（1987）

# 昭和61年度研究発表会要旨

と　き：1987年3月26日，午前9時30分～午後5時
ところ：統計数理研究所　講堂

あいさつ　　　所長　赤池弘次

## 統計基礎研究系

### 漸近展開の誤差評価

清水良一

$X$ は指数分布に従う確率変数，$\sigma$ はこれと独立な正の値をとる確率変数とする．積 $Z=\sigma X$ の分布 $F$（指数分布の scale mixture）は信頼性理論などで重要な役割をもっていてよく研究されている．この分布は completely monotone density をもつ．すなわち，p.d.f. $f(x)$ は無限回微分可能で

$$(-1)^n f^{(n)}(x)\geqq 0$$

が成り立つ．その hazard rate $f(x)/(1-F(x))$ は $x$ の単調減少関数である．また，$k$ 次までのモーメント $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ がもし存在するならばそれらは不等式

$$\mu_1\geqq \mu_2/2!\geqq\cdots\geqq \mu_k/k!$$

を満たす．どれかの不等号が等号になるのは $\sigma$ が定数，すなわち，$F$ が指数分布の場合に限る（この事は hazard rate が単調減少という仮定から容易に導かれる）．

この研究の目的は $\beta(k)\equiv \mathrm{E}|\sigma-1|^k$ が小さい，という意味で $\sigma$ が定数1に近いときに分布関数 $F(x)$ を指数分布の分布関数 $1-\exp(-x)$ の周りで展開し，かつその誤差を評価することである（昨年度は $X$ が標準正規分布の場合を扱った）．問題を少し一般化して，つぎの不等式が得られた．すなわち偶数 $k$ および任意のボレル集合Aに対して

$$\left|\Pr\{Z\equiv\sigma X\in \mathrm{A}\}-\int_{\mathrm{A}}(1-\sum\alpha(j)L_j(x)\cdot x)e^{-x}dx\right|\leqq 4kA(k)\beta(k),$$

ただし，$\alpha(j)=\mathrm{E}(\sigma-1)^j$, $L$ はラゲール多項式．また，$A(k)$ は $k$ だけできまる定数で $A(2)\leqq 3.05$, $A(4)\leqq 3.98$, $A(6)\leqq 4.75$ である．

この結果は指数分布のかわりにガンマ分布の周りでの展開に一般化することができる．今年度はさらに，藤越康祝氏との共同研究において，$X$ が標準正規分布およびガンマ分布を含む，もっと一般の場合について，2種類の互いに異なる展開とそれらの誤差評価も行った．また多変量の場合，すなわち $X$ が多変量正規，$\Sigma$ が対称な正定値確率行列（ランダムな行列）の場合に，確率ベクトル $Z=\Sigma^{1/2}X$ の分布の展開が問題になったが，$\Sigma\geqq I$ など，いくつかの特殊なケースについて誤差の評価が得られた．一般の場合はまだかなり難しい問題を含んでおり，今後の課題である．