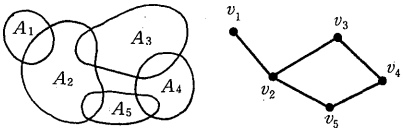


図5.

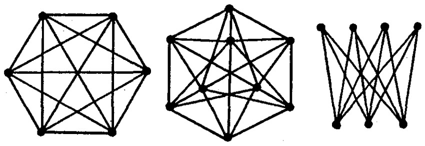


図6.

るとありがたいが，残念ながらそうとは限らない．実際，2以上の任意の値を忠実埋蔵次元に持つ平面的グラフが存在する．これは，平面的グラフには平らなもの(FED(G)=2) と丸いもの(FED(G)=3) とそれ以外のもの (FED(G)≧4) があると解釈すればよい．

例えば，図4-左のグラフは平らで，プラトン・グラフは丸い．その他のタイプは図4-右のように節（切断頂点集合）が何カ所かにあり，そこを固定して一部を裏返せるようになっている．こういう事実から平面的グラフの形も忠実埋蔵次元によって分類されると考えてもよさそうである．

ここまでの話はグラフに内在する幾何学の問題だったが，グラフの外にある幾何学をグラフで表現して解析するという方向もある．その一例として平面交グラフを紹介する．

一般に，集合族 $\mathscr{F}=\{A_1,\cdots,A_2\}$ の交グラフ $G(\mathscr{F})$ とは各集合 A_i に対して頂点 v_i を設けて2つの集合 A_i, A_k が空でない交わりを持つとき頂点 v_i と v_k を辺で結んで得られるグラフである．特に，A_i が平面 $\mathbb{R}^2$ の連結閉集合のとき $G(\mathscr{F})$ を平面交グラフと呼ぶ（図5参照）．

平面的グラフは平面交グラフになるが，平面的でないグラフでも平面交グラフになるものはいくらでも存在する．例えば，図6に示した非平面的グラフはすべて平面交グラフになる．どのように平面に集合を配置したらよいのか，クイズを解くつもりで考えてみると面白いだろう．勿論，数学的には平面交グラフの特徴付けを与えることが最終目標だが，それはかなりの難問である．

以上，簡単に幾何学的グラフ理論の例を紹介してきたが，まだまだいろいろな問題が考えられる．そういう問題を何千回，何万回と議論するうちに，私達の頭の中にグラフがリアリティを持って存在するようになることを夢見ている．図2と図3が同じグラフを表しているということは言葉の上で理解することはできるが，グラフというリアリティを獲得した人間にとってはそれらが同じグラフか否かという問いはナンセンスである．どんな絵の描き方をしても初めから同じグラフは同じに見えてしまうような感性を持った新人類がいつの日か現れてこないとも限らないだろう．

最短木の長さの推定問題

京都工芸繊維大学工芸学部　古　山　正　雄

1. 問題の提示

本稿の目的は，最短木の長さを推定することである．最短木の長さについては，2種類の問題が考えられる（図1）．

問1．　1×1の正方形内に n 個の点をランダムに置く．これら n 個の点を結ぶ最短木の長さは如何？

問2．　n 個の頂点をもつ完全グラフの各辺に，1×1の正方形内の任意の2点間の距離をランダムに重みとして付加する．この時，n 個の点を張る最小木の重さは如何？

この2つは異なる問題だが，外見が相似しているのみならず，実は結果においても似ている

ことから，相互に比較すれば興味深い．ここでは問1に対して幾何的方法を用い，問2に対しては，ランダムグラフ理論による分析を試みる．

2. 問1の解

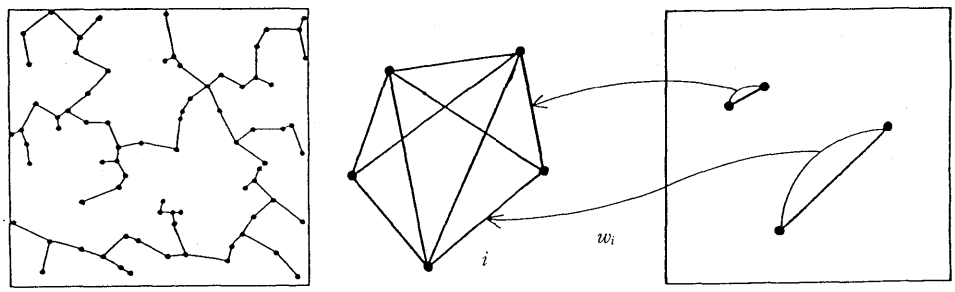
(1) 上限値　$2\sqrt{n} \geqq \mathrm{E}(L)$

最短木の長さをLとすると，その期待値の上限値が$2\sqrt{n}$以下であることは直ちに解る．図2の①を参照しながら簡単に説明すると，n個の点をk個ずつに分けるように正方形を矩形に分割する．各矩形内にk個の点が入るように分割したのだから矩形の数は約n/k個．

次に各矩形の真中に1本の大通りを通し，k個の点から垂線を下す．その総延長は，矩形iの幅をd_iとすると，$1+k(d_i/2)$以下である．更にn/k個の矩形についてその総和をとれば，$\sum_i d_i=1$に注意して，$n/k+k+1$を得る．今この総和は，$k=\sqrt{n}$の時に最小値$2\sqrt{n}+1$をとる．nが充分大きければ，$\mathrm{E}(L) \leqq 2\sqrt{n}$と考えてよい．

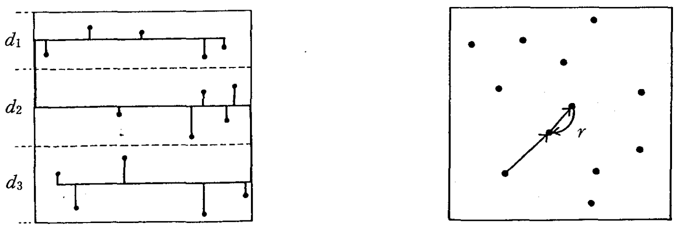
(2) 下限値　$0.5\sqrt{n} \leqq \mathrm{E}(L)$

点が平面内に，密度ρで一様にランダムに分布している時，任意の1点から最近隣点までの距離rの期待値が



問1の図　　問2の図

図1.



① $\mathrm{E}(L) \leqq 2\sqrt{n}$

$$X_1 \leqq 1+k(d_1/2)2$$
$$X_2 \leqq 1+k(d_2/2)2$$
$$X_3 \leqq 1+k(d_3/2)2$$
$$L=\sum X_i \leqq n/k+k+1$$
$$L \leqq 2\sqrt{n} \quad \text{for} \quad n/k=k$$

② $0.5\sqrt{n} \leqq \mathrm{E}(L)$

$$f(r) \sim 2\pi r\rho e^{-\pi r^2 \rho}$$
$$\mathrm{E}(r)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$
$$\mathrm{E}(L) \geqq (n-1)\,\mathrm{E}(r) \sim \frac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$P=\pi/(4\pi/3+\sqrt{3}/2) \sim 0.6215$$

図2.

$$\mathrm{E}(r)=0.5\sqrt{1/\rho}$$

であることから，

$$\mathrm{E}(L)\geqq(n-1)\cdot 0.5\sqrt{1/n} \quad \sim \quad 0.5\sqrt{n}\,.$$

(3) 計算機実験　$\mathrm{E}(L)=0.678\sqrt{n}$

上下限値が得られた所で，$\mathrm{E}(L)=c\sqrt{n}$ と想定して，実用的な観点から c の値を実験的に求めてみると，$c=0.68$ 程度となる．

この値は点の数 n の値を変化させても，領域の形状を変化させても，かなり安定した値である（図3）．

しかし，点の分布を一様分布から正規分布に変えると，$c=0.61$ 程度に減少する傾向がみられる．

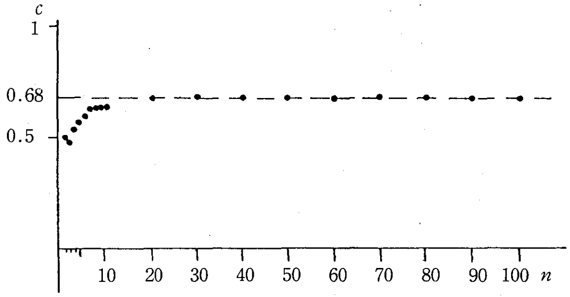


図3.　点の個数と長さ

3.　問2の解

問2の目的は，各辺にランダムに重み付けられたグラフから，最小の重みをもつ木を抽出して，その重さの値を知ることである．この為にはグリーディなアルゴリズムを用いて，閉路をつくらないように注意しながら，小さな重みをもつ辺から順々に選出していけばよい．

これを実行するには，重みの順序統計量，つまり小さい方から第 k 番目の重みの値が必要になる．更に最小木の構成に寄与する辺，つまり小さい方から第 k 番目の重みをもつ辺は，閉路を形成するのか，又は木を構成するのかを判定する為の情報が必要になる．

(1) 辺の重みの順序統計量

正方形内の任意の2点間の距離 t の分布関数 F_t は，$0\leqq t\leqq 1$ の時

$$F_t=\frac{t^2}{2}\,(t^2-16t/3+2\pi).$$

ここから，辺の数 $N=\binom{n}{2}$ (n は頂点数)だけランダムサンプリングをすると，小さい方から第 k 番目の重み w_k の期待値は，

$$\mathrm{E}(w_k) \quad \sim \quad \sqrt{2/\pi}\,\sqrt{k}/n, \qquad (1\leqq k\leqq n\log n) \tag{3.1}$$

で与えられる．

(2) 最小木を構成する辺の番号

小さな重みをもつ辺から順々に，$1,\cdots,N$ まで番号を付けて，この順序に2点を結合していく

と，その結果得られるグラフの成分は，n から1まで減少していく．

ところで1本の辺を付加した時，成分数は1つ減少するか，或いは全く減少しないかのいずれかである．減少しない場合には閉路が生じ，減少する場合には閉路が生じない為，この辺は木の構成に寄与する（最小木の1辺となる）．

以上の観察から，求める重み $\mathrm{E}(w)$ は，

$$\sum_{k=1}^{N}(\text{第}\,k\,\text{番目の重み})\times(\text{第}\,k\,\text{番目の辺が付加された時の成分数の増分})\geqq 0.564\sqrt{n}$$

で与えられる．

ここに，第 k 番目の重みは，式(3.1)から得られ，成分数の変化は，ランダムグラフ理論から得られる．つまり，k 本の辺によって生じるグラフの成分数 u_k は，$c=2t/n$ とおいて，

$$u_k=n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}c^{k-1}e^{-kc} \tag{3.2}$$

で与えられることから，増分が算出される．

4. 結果の考察

問1，問2の結果は，いずれも「長さ（又は重さ）は，頂点数の平方根に比例する」ことを主張している．ところでこの関係式は，結晶学や都市の道路網等においても広く見いだされるものである．例えば結晶においては，

(体積/表面積)∝(表面積/稜の長さ)∝(稜の長さ/頂点数)

という実測結果が報告されている．一方道路網に関しては，

(総延長)∝(交差点数)

という関係がみられるのである．

それぞれの特質に応じて，比例定数が異なるだけであるという点を指摘しておきたい．

参考文献

1) Bollobás, B. (1985). *Randam Graphs*, Academic Press.
2) 古山正雄(1985). 都市における汎用的ネットワークとその長さの推定，日本都市計画学会学術論文集．

コンピュータ・グラフィックスにおける3次元フラクタルの提案とその応用

名古屋大学工学部　横　井　茂　樹

1. は じ め に

コンピュータ・グラフィックスの基本手法として，フラクタル理論[1]を応用した1次元，および2次元のランダム・フラクタルを用いる手法が近年試みられ，木，海岸線，山肌，地形などの自然の不規則形状を表現するのに有用であることが確認されている[2),3)]．

今回，筆者らは従来考えられたことの無かった3次元空間中の格子点の値を，3次元ランダム・フラクタル手法を用いて生成して，3次元空間中のゆらぎを実現する手法を開発した．本稿では，これを用いて，指数減衰の裾を持つ台形状の縞関数にゆらぎを与えることによって，縞模様のある大理石のソリッドテクスチャ[4)]を表現する手法について報告する．