統計数理 第35巻 第1号（1987）

戸田格子の保存量と生存競争の系の保存量

統計数理研究所　伊　藤　栄　明

（1987年7月　受付）

1. はじめに

日本においてはジャンケンが日常生活の様々な場面で行われる．ジャンケンに勝つためには相手の手を読む能力，乱数発生能力などが必要であり，これはゲームの理論のよい例題になっている．ジャンケンには，石，紙，はさみの3つの手があり，どの手も他のひとつの手より強く，残りのひとつの手より弱い．ジャンケンは奇数個の手のある場合に自然に拡張される．$2r+1$ 個の手のあるジャンケンの場合，強弱関係は有向グラフのひとつである regular tournament により定めるのが自然である．$2r+1$ 個の node のある regular tournament においては各 node は他の r 個の node よりも強く，残りの r 個の node よりも弱い．ジャンケンの場合は $r=1$ である．

気体分子運動論において Boltzmann は各粒子の持つエネルギーの確率分布の変化を記述する方程式をみちびいた．各粒子が持つのはエネルギーではなく，石，紙，はさみのいずれかの手であると考える．粒子相互の衝突により，弱い手を持つ粒子は強い手を持つ粒子に変化するというモデルを考えると次のような Lotka-Volterra 方程式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_1&=P_1(\qquad -P_2+P_3)\\ \frac{d}{dt}P_2&=P_2(P_1\qquad -P_3)\\ \frac{d}{dt}P_3&=P_3(-P_1+P_2\qquad)\end{aligned}\tag{1.1}$$

ここで，1, 2, 3 はそれぞれ，石，紙，はさみをあらわすとし P_1, P_2, P_3 はそれぞれの手の粒子の比率をあらわす．同様なモデルを $2s+1$ 個の手を持つ，拡張されたジャンケンについて考えると，$i=1, 2,\cdots,2s+1$，について，

$$\frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}\right)\tag{1.2}$$

なる方程式が得られる．ここでそれぞれの i について $P_{i+2s+1}=P_i$ が成り立つものとする．この系には $s+1$ 個の保存量があることが示される．

ソリトン解を持つ系として知られている戸田格子には $2m$ 個の変数について m 個の保存量がある．本稿ではまず戸田格子の保存量について述べる．次に（1.2）式であらわされる生存競争の系における保存量についてランダムサンプリングの概念をもちいた定義を述べる．また保存量について REDUCE をもちいた研究，数値計算の結果の立体視による研究について報告する．

2. 戸田格子と保存量

隣接した粒子が相互作用をしている1次元の格子（鎖）については戸田（1978）によるわかりやすい解説がある．一様な体系に限れば粒子の質量を M，n 番目の粒子の変位を y_n，粒子間の相互作用のポテンシャルを $\phi(y_{n+1}-y_n)$ とするとき，運動方程式は

$$M\frac{d^2y_n}{dt^2}=\phi'(y_{n+1}-y_n)-\phi'(y_n-y_{n-1}) \qquad (n=\cdots,-1,0,1,2,\cdots) \tag{2.1}$$

と書ける．ここで ϕ' は ϕ の微分を意味する．

$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar$ なる形であらわされる指数型相互作用の格子の運動方程式として

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q_n&=P_n\\ \frac{d}{dt}P_n&=C\{e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

を考える．ここで $P=M\frac{dy}{dt}$ は運動量，$Q=y$ は変位である．

これは戸田格子としてよく知られている（Toda (1967, 1976)）．N 個の粒子からなる周期的格子を考えれば，$Q_{n+N}=Q_n$，$P_{n+N}=P_n$ である．ここで

$$X_n=Ce^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$

とおけば運動方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_n&=(P_n-P_{n+1})X_n\\ \frac{d}{dt}P_n&=X_{n-1}-X_n\ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

戸田格子はソリトン解を持つ．ソリトンとは変形しないで進む孤立波であり2つのソリトンが衝突しても互いに通り越して，もとの波形にもどるというような興味深い性質を持つ．

この系について，Henon (1974) は N 個の保存量

$$I_m=\sum P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k}(-X_{j_1})\cdots(-X_{j_l}) \qquad (m=1,2,\cdots,N) \tag{2.4}$$

があることを示した．ここで和 $\sum$ は次の条件を満たすすべての項の和である．

（i） 添字 i_1, $i_2,\cdots,i_k$, j_1, $j_1+1,\cdots,j_l$, j_l+1 はすべて異なる．

（ii） これらの添字の総数は $m=k+2l$ であり，P_i や X_j の順序のちがう項は同じと見てただ1回だけとる．

例えば $N=3$ のときは

$$\begin{aligned}I_1&=P_1+P_2+P_3\\ I_2&=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1-X_1-X_2-X_3\\ I_3&=P_1P_2P_3-P_1X_2-P_2X_3-P_3X_1\end{aligned} \tag{2.5}$$

である．

上記の定理の Henon による証明は組み合わせ論的な議論にもとづいている．すなわち，$\frac{d}{dt}I_k$，$k=1,2,\cdots,m$，において，ある項があれば，それと符号が逆な項がひとつだけある．こ

れがそれぞれについて成り立ち，$\frac{d}{dt}I_k=0$ を示すことができる．Flashka (1974)は戸田格子の運動方程式を次の Lax 形式

$$\frac{d}{dt}L=BL-LB \tag{2.6}$$

によりあらわせるように変形し，Lの固有値が時間によらない定数であることを示した．このことより Henon と同様な保存量をみちびいた．Sawada and Kotera (1976) は力学量 A の運動方程式

$$\frac{d}{dt}A=[A,\ H] \tag{2.7}$$

から出発した．ここで右辺はいわゆる Poisson 括弧式を意味し，H は周期的な指数型相互作用の格子のハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2}\sum_n P_n^2+\sum_n\left(e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}-1\right)$$

である．これより自然な形で Henon の定理をみちびいている．

方程式 (2.1) において $\phi(r)$ が C を定数として Cr^2 なる形をしているとき，運動方程式は線型方程式になる．戸田格子のように非線型方程式になる場合は非線型格子といわれている．Hirota and Suzuki (1973) は戸田格子に対応する回路を考えた．すなわちインダクタとカパシタにある非線型性を仮定し，それらを，はしご型につなぐことにより戸田格子と同様の微分方程式にしたがう系をつくった．これにより，ソリトンの衝突などを再現させた．さらに Hirota and Satsuma (1976) は

$$\frac{d}{dt}P_n=P_{n-1}P_n-P_nP_{n+1} \qquad (n=\cdots,0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{2.8}$$

を実現する回路を考え，これについてのソリトン解を求めた．この方程式に 3 次の項を加えた系について Wadati (1976) は議論している．以上については戸田 (1978) によりくわしく述べられている．

3. 生存競争の系の保存量

筆者が以前から調べてきた生存競争の系 (Itoh (1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1987)) の保存量について考える．(1.2) 式における $s+1$ 個の保存量についてランダムサンプリング及び対等という概念にもとづいて考えてみたい．

$$\sum_{j=1}^{s} P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s} P_{i+j}=\sum_{j=1}^{2s+1} a_{ij}P_j$$

とおくと $a_{ij}+a_{ji}=0$ であり，a_{ij} は，1, 0 あるいは -1 の値をとる．$a_{ij}=1$ であるとき i は j より強いということにする．$2r+1$ 個の種，$r=0, 1, 2,\cdots,s$, があったとして，それぞれの種が他の r 個の種よりも強く，残りの r 個の種よりも弱いとき，$2r+1$ 個の種は対等であるということにする．方程式 (1.2) において P_i は種 i の個体数の全体におけるわりあいであると考えることにする．そのとき I_r なる量を $2r+1$ 個の個体をランダムにえらびだしたときそれぞれの個体の属する $2r+1$ 個の種が対等である確率と定義する．例えば $s=2$ の場合

$$I_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$
$$I_1 = P_1P_2P_4 + P_2P_3P_5 + P_3P_4P_1 + P_4P_5P_2 + P_5P_1P_3 \tag{3.1}$$
$$I_2 = P_1P_2P_3P_4P_5$$

である．

式(1.2)について $I_0, I_1, \cdots, I_s$ を考える．I_i, $i=0, 1, 2, \cdots, s$, の時間微分について

$$\frac{d}{dt}I_i = 0 \tag{3.2}$$

が成り立つ．すなわち $I_0, I_1, \cdots, I_s$ は保存量である（Itoh (1987)）．この証明は各 r についての微分 $\frac{d}{dt}I_r$ について，ある項があれば，それと符号が逆な項がひとつだけあるということを示すことによる．この場合 Lax 形式に帰着させる方法による証明はまだ得られていない．戸田格子の場合 I_1 は運動量であり，I_2 はエネルギーであるが I_3 以上の保存量の簡単な物理的意味は考えにくい．我々の場合，I_{2r+1} は個体をランダムに $2r+1$ 個えらびだしたときにそれぞれの属する種が $2r+1$ 個あり，それらが対等である確率である．(3.2)式はその確率が時間によらない量であるという意味を持つ．この点で我々の系は意味のわかりやすい保存量を持つ系であり，ひとつの典型であると思われる．

4. 計算機をもちいて保存量を求める

数式処理のプログラム REDUCE をもちいて他の類似の Lotka-Volterra 系についての保存量をさがした結果について述べる．

ここでとりあつかうのは $2s+1$ 個の変数のある系であり，$P_{i+2s+1} = P_i$ が各々の i について成り立つものとする．REDUCE は広田(1984)等によりソリトン物理学にもちいられているが，我々の問題について適用した例を報告する．

以下に述べる場合は

$$\sum_{i=1}^{2s+1} P_i \tag{4.1}$$

$$\prod_{i=1}^{2s+1} P_i \tag{4.2}$$

は保存量になっている．

順回置換により不変である奇数次の多項式 $\sum_{i=1}^{2s+1}\prod_{j=1}^{m} P_{i+k_j}$, $2s+1 \geqq m$, のなかから REDUCE をもちいてさがした保存量について示す．

例 1.
$$\frac{d}{dt}P_i = P_i(P_{i-1} - P_{i+1})$$

これについては $s=1$, $s=2$, $s=4$ の場合には存在しない．$s=3$ の場合 $\sum_{i=1}^{7} P_i P_{i+2} P_{i+4}$ が保存量である．

例 2.
$$\frac{d}{dt}P_i = P_i\left(\sum_{j=1}^{2} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{2} P_{i+j}\right),$$

これについては $s=2$ の場合は(3.1)式に示したものである．$s=3$ の場合は存在せず，$s=4$ の場合，

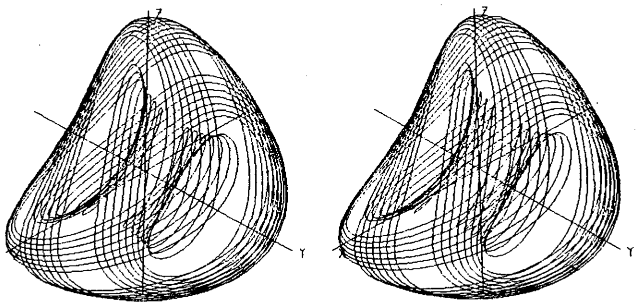
$$\sum_{i=1}^{9} P_i\, P_{i+3}\, P_{i+6} = 3(P_1P_4P_7 + P_2P_5P_8 + P_3P_6P_9)$$

及び

$$\sum_{i=1}^{9} P_i\, P_{i+1}\, P_{i+3}\, P_{i+5}\, P_{i+7}$$

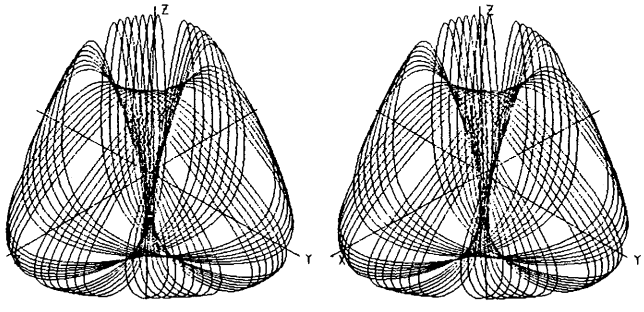
が保存量である．

```
COMBINATION    : (1 2 3)
INITIAL VALUES: ( 0.10 , 0.20 , 0.30 )
CENTER OF PNT : ( 0.20 , 0.20 , 0.20 )
CENTER OF EYE : ( 40.0 , 40.0 , 40.0 )
PLANE          : 0.017 X+0.017 Y+0.017 Z=1.0
```



(a) P_1, P_2, P_3 について

```
COMBINATION    : (1 2 4)
INITIAL VALUES: ( 0.10 , 0.20 , 0.20 )
CENTER OF PNT : ( 0.20 , 0.20 , 0.20 )
CENTER OF EYE : ( 40.0 , 40.0 , 40.0 )
PLANE          : 0.017 X+0.017 Y+0.017 Z=1.0
```



(b) P_1, P_2, P_4 について

図 1．例 1 の数値解

例 3.

$$\frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{j=1}^{3}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{3}P_{i+j}\right)$$

これについて，$s=3$ の場合は 3 章に述べた結果が適用される．$s=4$ の場合，

$$\sum_{i=1}^{9} P_i\, P_{i+3}\, P_{i+6}=3\,(P_1P_4P_7+P_2P_5P_8+P_3P_6P_9)$$

が保存量となる．

数値計算による解の軌跡を立体視により調べることにより，保存量の存在を，視覚的に理解することができる（伊藤，上田（1975, 1981））．次の2つの数値計算例において初期値はともに (0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.2) である．例 1 において $s=2$ の場合を考える．図 1 に示すようにこの場合は 3 つの保存量があると思われる．もっと一般的な系ではどうかということが問題になる．例えば係数が +1, 0, −1 に限らない場合はどうか．これについての数値計算の結果を図 2 に示す．図に示したのは次の方程式である．

$$
\begin{array}{rllllll}
\frac{d}{dt}P_1=P_1(& & 0.5P_2 & +P_3 & -P_4 & -P_5) \\
\frac{d}{dt}P_2=P_2(& -0.5P_1 & & +P_3 & +P_4 & -P_5) \\
\frac{d}{dt}P_3=P_3(& -P_1 & -P_2 & & +P_4 & +P_5) \\
\frac{d}{dt}P_4=P_4(& P_1 & -P_2 & -P_3 & & +P_5) \\
\frac{d}{dt}P_5=P_5(& P_1 & +P_2 & -P_3 & -P_4 &).
\end{array}
\tag{4.3}
$$

```
COMBINATION    : (1 2 3)
INITIAL VALUES: ( 0.10 , 0.20 , 0.30 )
CENTER OF PNT : ( 0.18 , 0.19 , 0.27 )
CENTER OF EYE : ( 40.0 , 40.0 , 40.0 )
PLANE          : 0.017 X+0.017 Y+0.017 Z=1.0
```

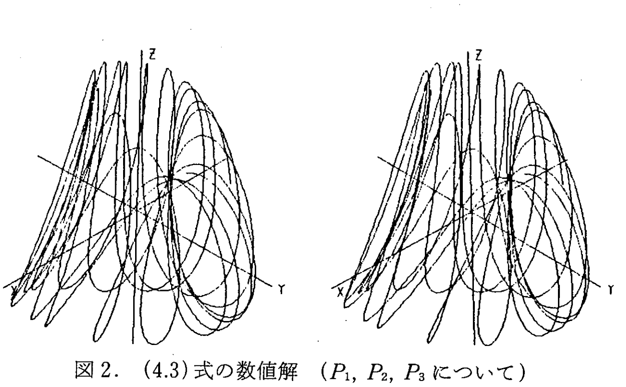


図 2．(4.3) 式の数値解 （P_1, P_2, P_3 について）

図よりこの場合も保存量が3個あることが予想される．$2s+1$ 個の変数のある Lotka-Volterra 系で保存量が $s+1$ 個あるということはかなり一般的な条件で言えるのではないかと思われる．

謝　辞

計算機プログラムの作成に御協力いただいた西島裕子さんに感謝する．

参 考 文 献

Flashka, H. (1974). The Toda lattice I, *Phys. Rev. Sect.*, B**9**, 1924-1925.

Henon, M. (1974). Integrals of the Toda lattice, *Phys. Rev. Sect.,* B**9**, 1921-1923.

Hirota, R. and Suzuki, M. (1973). Theoretical and experimental studies of lattice solitons in nonlinear lumped networks, *Proc. IEEE,* **61**, 1483-1491.

Hirota, R. and Satsuma, J. (1976). A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice, *Prog. Theor. Phys.* (Suppl.), **59**, 64-100.

広田良吾 (1984). 数式処理 (REDUCE 3) の応用, REDUCE プログラミング資料第一集, 9-70 (「数式処理の学際的応用への総合的研究」研究班).

Itoh, Y. (1971). Boltzmann equation on some algebraic structure concerning struggle for existence, *Proc. Japan Acad.*, **47**, 854-858.

Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 635-641.

Itoh, Y. (1975). An H-theorem for a system of competing species, *Proc. Japan Acad.,* **51**, 374-379.

伊藤栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質, *Seminar on Probability,* **44**, 141-146.

Itoh, Y. (1979). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Prob.,* **16**, 36-44.

Itoh, Y. (1981). Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction, *Nonlinear Anal.*, **5**, 53-56.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Prog. Theor. Phys.*, **78**, 507-510.

伊藤栄明・上田澄江 (1975). 生存競争のモデルとシミュレーション, 統計数理研究所彙報, **23**, 94-104.

伊藤栄明・上田澄江 (1981). 立体視の適用例, 統計数理研究所彙報, **28**, 55-59.

Sawada K. and Kotera, T. (1976). Toda lattice as an integrable system and the uniqueness of Toda's potential, *Prog. Theor. Phys.* (Suppl.), **59**, 101-106.

Toda, M. (1967). Vibration of a chain with nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Japan,* **22**, 431-436.

Toda, M. (1967). Wave propagation in anharmonic lattices, *J. Phys. Soc. Japan,* **23**, 501-506.

Toda, M. (1976). Development of the theory of a nonlinear lattice, *Prog. Theor. Phys.* (Suppl.), **59**, 1-35.

戸田盛和 (1978). 非線型格子, 岩波書店.

Wadati, M. (1976). Transformation theories for nonlinear discrete systems, *Prog. Theor. Phys.* (Suppl.), **59**, 36-63.

Toda Lattice and a Dynamical System on Competition

Yoshiaki Itoh

(The Institute of Statistical Mathematics)

We introduce a Lotka-Volterra system with $s+1$ conserved quantities of $2s+1$ variables. In our system, each species interact with the other $2s$ species as

$$\frac{d}{dt}P_i = P_i\left(\sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j}\right),$$

where P_i is the relative abundance of species i. Define a_{ij} by

$$\sum_{j=1}^{2s+1} a_{ij}P_j = \sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j} .$$

We say i dominates j if $a_{ij}=1$. If $a_{ij}=-1$, we say i is dominated by j. Consider $2r+1$ species out of the $2s+1$ species. If each of the $2r+1$ species dominates the other r species and is dominated by the other remained r species, then we say the $2r+1$ species are equivalent. Obviously the $2s+1$ species of our system are equivalent. Take $2r+1$ individuals at random from the system. Let I_r be the probability that the species of the $2r+1$ individuals are different with each other, and the $2r+1$ species are equivalent. Then the I_r, $r=0, 1, 2, \cdots, s$ are time invariant constant. The conserved quantities for the case $s=2$, are

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=I_0,$$
$$P_1P_2P_4+P_2P_3P_5+P_3P_4P_1+P_4P_5P_2+P_5P_1P_3=I_1,$$

and

$$P_1P_2P_3P_4P_5=I_2.$$

We discuss conserved quantities for related Lotka-Volterra systems by using REDUCE and stereo-pair drawings.

There are m conserved quantities for the general cyclic Toda lattice of $2m$ variables. Our system may be another typical system which has conserved quantities as Toda lattice.