て，"車"同士に相互作用などの"意志"を持たせる第一歩として本報の意義は大きいと考える．

さらに，"車" 同士に斥力・引力などの相互作用の導入，動きの導入，異なる形の "車" の混合駐車，更には格子点での駐車という制限を外して，自由平面での解析，そして三次元での解析等を通じて，より現実に近いシミュレーションが可能であろうし，より広い分野における各種の問題に応用できると考えられ，今後に残された課題は多い．

参考文献

1) 米澤・渡部 訳 (1982)．ザイマン，乱れの物理学，丸善，41．
2) 深谷 (1985)．第46回応用物理学会秋季大会，3a-ZA-13．
3) 深谷，小高，吉川 (1986)．化技研報，**81**，265．
4) 深谷，小高 (1986)．第33回応用物理学会春季大会，2a-D-1．
5) 数学ハンドブック編集委員会編 (1960)．数学ハンドブック，丸善，297．
6) 本尾　哲 (1983)．電気化学協会主催第8回電気化学セミナー予稿集，30．
7) 宮崎　亨，小坂井孝生 (1984)．日本金属学会会報，**23**，757．
8) Fukaya, T. and Tsujiuchi, J. (1975). *Nouv. Rev. Optique*, **6**, 317.
9) Tanaka, K. and Uchida, S. (1983). *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 1312.

一般化ボロノイ領域とその応用

統計数理研究所　種　村　正　美

1. 序

空間の有限領域 V に散布する N 個の粒子の位置座標を $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N)$ とする．空間の次元は任意で良いが，便宜上以下の議論を二次元平面において進める．

平面上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，それに最近接の粒子 $\boldsymbol{a}_i$ が定義できる．それを $n(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_i$ と表すことにする．これとは逆に粒子 $\boldsymbol{a}_i$ を与えたとき，$\Pi(\boldsymbol{a}_i)=\{\boldsymbol{x};\ n(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_i\}$ とする．半平面 K_{ij} を

$$K_{ij}=\{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_i|<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_j|\}$$

で定義すれば

$$\Pi(\boldsymbol{a}_i)=\bigcap_{i\neq j} K_{ij}$$

となり，$\Pi(\boldsymbol{a}_i)$ は一般に半平面で囲まれた凸領域で，しかも $\{\Pi(\boldsymbol{a}_i),\ i=1,\cdots,N\}$ は空間を隙間なく，また重なりなく分割する．$\Pi(\boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{a}_i$ のボロノイ領域と呼ばれる．またボロノイ領域による空間の分割をボロノイ分割と呼ぶ．

2. 一般化ボロノイ領域

上のボロノイ領域の概念は以下のような一般化が可能である．上と同様に $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N)$ を平面上の粒子座標とする．前記のボロノイ領域は平面上の各点を最近接の粒子に割り振ることによって得られたが，これを拡張して平面上の各点を第 $k\,(=2, 3, \cdots)$ 近接までの粒子集合に割り振ることを考えてみよう．これと逆に任意の k 個の粒子集合に対して $\Pi(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)=\{\boldsymbol{x};\ n_k(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$ が定義できる．これを k 次のボロノイ領域という．

3．第 k 近接距離分布

標本点-個体間最近接距離を X, 個体-個体間最近接距離を Y で表し，それらの分布関数をそれぞれ $p(t)$ および $q(t)$ で表すことにする．位置座標の与えられた点配置データにおいて，X が Y よりも一般に有用であることが示されるが，その理由は $p(t)$ および X の密度関数 $f(t)$ の経験分布が精密に計算できるためである．この経験分布はランダム標本点を実質的に無限個にしたことに対応する．

この考え方は最近接距離に限らず，第 $k(\geqq 2)$ 近接距離にも適用できる．そして，それの精密な分布が求まれば，最近接距離のみを利用する場合に較べて，配置パターンに対するもっと詳細な情報が取り出せることになる．

標本点-個体間の第 k 近接距離を X_k で表し，その分布関数を $p_k(t)$ で表すこととする．また X_k の密度関数を $f_k(t)$ とする．$p_k(t)$ は以下のように表すことができる：

$p_k(t)=\Pr\{X_k<t\}=\Pr\{$ランダム点が第 $k-1$ 近接までの個体を除くいずれかの個体と距離 t 内に存在する$\}$

$=\Pr\{$各個体を中心とし，半径が t の円で k 重に覆われる部分にランダム点が含まれる$\}$

$=|V|^{-1}$（半径が t で各個体を中心とする円板系による k 重被覆領域の面積）

そして，$f_k(t)$ は次のように表せる：

$f_k(t)=dp_k(t)/dt$

$=|V|^{-1}$（半径が t で各個体を中心とする円板系による k 重被覆領域の周囲長）

所与のデータに対して，これらの関数の計算には複雑な図形の処理が伴うため一見面倒であるが，それはここで議論した一般化 Voronoi 図形を用いることによって容易に計算可能である．

参　考　文　献

1) Miles, R.E. and Maillardet, R.J. (1982). The basic structures of Voronoi and generalized Voronoi polygons, *Essays in Statistical Science* (eds. J. Gani and E.J. Hannan), *J. Appl. Prob.* (Suppl.), **19**A, 97-111.

二次元 Voronoi 分割の最適化問題における厳密解

東京工業大学理学部　堀　　素夫・大木光晴

「二次元ユークリッド空間上に，母点 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ を与える．この時，ある実数値関数 $F(\{\boldsymbol{x}_i\})$ を最小にする母点の配置は何か．」という問題に対して，大抵の場合，直観的に，「その配置が三角格子の時である．」と答えるであろう．ここでは，三角格子の時

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2}\min_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j\|^2,$$

$$\max_i\max_j\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j\|^{-2},$$