

2次元システムの適応制御

統計数理研究所 宮 里 義 彦

(1987年10月 受付)

1. 緒 言

通常の動的システムは時間軸の方向に推移則を定めることにより表現が可能となるが、1方向だけでなく2方向に推移則を定めて初めて表現できるシステムも存在する。これは例えば分布定数系を有限差分近似して解析するときに出現したり (Jain (1977), Jain et al. (1978)), むだ時間系を2つのオペレータにより表現するときに現われたり (Eising et al. (1981)), またデジタル画像処理において処理の容易なように画像を一種の回帰モデルで表わすとき (Attasi (1976), Roesser (1975)) に多く見受けられる。それらのシステムは通常のシステムに対し2次元システムと呼ばれ、前述のような問題から最近、特に着目されている。これらは2つの適当なオペレータを定義すると、伝達関数が2変数の有理関数(時に無理関数)により記述されるシステムであり、1次元システム(以後、通常の動的システムをこう呼ぶ)とのアナロジーから状態変数モデルが Attasi, Roesser らにより提起されたのを契機として制御理論の側面からも活発に研究されている (Attasi (1976), Roesser (1975))。特に安定で要求される特性を有する2次元デジタルフィルタの設計などの要請から、状態フィードバックによる2次元システムの安定化問題 (Kaczorek (1983), Paraskevopoulos (1979)), その状態フィードバックを実現するためのオブザーバ構成問題(確率場においてはフィルタリング) (雛元 (1981), Hinamoto et al. (1982), 雛元 他 (1984), 川路 他 (1983)), 伝達関数表現から2次元状態空間モデルを導出する実現問題 (Eising (1978, 1980)), より簡単な実現のためのシステムの非干渉化問題 (Paraskevopoulos (1982)), 任意の特性を実現するための2次元モデル追従問題(サーボ問題も含む) (Yasuda (1981)) などに多くの関心が寄せられている。

本稿ではこれらに対し、共分散関数が変数分離型になる簡単なモデルとして Attasi によって提案された2次元システムの状態変数モデル (Attasi (1976)) (厳密にはそれを若干一般化したもの) についてモデル規範形適応制御系 (Model Reference Adaptive Control System: MRACS) を構成する手法を論じる。

適応制御とは、事前に完全なシステム同定ができなかったために未知パラメータを含んだり、動作条件、環境条件などの変化により結果的に変動パラメータを含むような制御対象に対して、制御装置の特性を実時間で自動調整し制御系の性能を常に良好な状態に保つ制御方式のことである。その中でも特に制御系に要求される性能を規範モデルの形式で表現し、規範モデルの出力に制御対象の出力が追従するように、制御装置のパラメータを自動調整する方式のものはモデル規範形適応制御系と呼ばれている (Goodwin et al. (1984), 市川 他 (1984), Landau (1979), Landau et al. (1981))。

本稿では特性が未知な2次元システム(具体的には生成規則の定まらないデジタル画像や、物理的なパラメータが未知の分布定数系、むだ時間系など)に適当な入力と出力を設定したときに、その出力が、任意に与えられた2次元システム(規範モデル)の応答(2次元上のパター

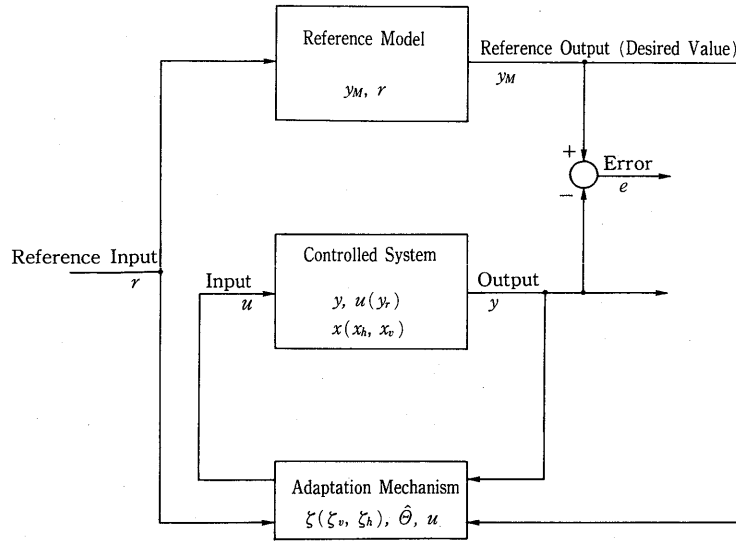


Fig. 1. Model reference adaptive control system

ン)と一致するように、逐次的に対象の2次元システムを同定しながら入力を決める問題を扱う。

2. 問題設定

問題の背景については次章で述べることとして、本章では問題の定式化を行なう。次式で表現される Attasi 型 2次元システムを制御する対象とみなす。

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} x_h(i+1, j) \\ x_v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} y_r(i, j) \\ y(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} u(i, j) \quad (i, j \geq 0).$$

ここに $x_h(i, j) \in \mathbf{R}^{n_1}$ は j を固定したときに i 方向に更新される状態ベクトル、水平状態ベクトルであり、同様に $x_v(i, j) \in \mathbf{R}^{n_2}$ は i を固定したときに j 方向に更新される状態ベクトル、垂直状態ベクトルであって、初期条件は $x_h(0, k), x_v(k, 0), k \geq 0$ のように与えられる。また $u(i, j) \in \mathbf{R}$ を入力 (操作量)、 $y(i, j) \in \mathbf{R}$ を出力 (制御量) と設定する。 $A_1 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, A_2 \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_1}, A_3 \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}, b \in \mathbf{R}^{n_1}, C_1 \in \mathbf{R}^{1 \times n_1}, C_2 \in \mathbf{R}^{1 \times n_1}, C_3 \in \mathbf{R}^{1 \times n_2}, d \in \mathbf{R}$ は全て未知とする。状態ベクトルも未知とするが、構成の都合上、出力 $y(i, j)$ 、入力 $u(i, j)$ 、さらに参照用の信号として新しく導入した $y_r(i, j) \in \mathbf{R}$ は測定可能とする。特に $y_r(i, j)$ は制御対象の2次元システムとしての可観測性 (可観測性については付録参照のこと) を満足するために制御量 $y(i, j)$ 以外に設定した観測量であり、ここでは水平状態ベクトル $x_h(i, j)$ の情報の一部を表わしていると解釈する。

これに対し上記の2次元システムと同様に2次元場 (i, j) ($i=0, 1, 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots$) で定義された任意の一様有界な信号 $y_M(i, j)$ (規範モデルの出力) に対して

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_M(i(n), j(n)) - y(i(n), j(n))\} = 0$$

が成立するように対象に加える入力 $u(i, j)$ を適応的に合成する。ただし $(i(n), j(n))$ は $(0, 1, 2, \dots) \times (0, 1, 2, \dots)$ の中の単調増加な部分列とする (付録参照)。

注意 1. 適応制御においては対象の特性が未知である場合だけでなく、特性が変化する場合も問題の対象としている。しかし数学的な問題設定にあたっては、特性が変動したときの局所的な追従性、安定性を論じるのが困難であるために、特性が初期時点で変化してその後、特性が一定となった場合の漸近安定性を論じる。これは特性が変動する場合に安定性を保証するための最小限の必要条件と見なすこともできる。

3. 2次元システム

本章では前章の Attasi 型 2次元システムの背景について述べる。時系列解析で使われる自己回帰 (AR)、自己回帰移動平均 (ARMA) モデルをデジタル画像に対しても適用する試みは多くある。その際、まず最初に連続型の分布定数モデルを仮定してその後、離散化により回帰モデルを導出する場合がある (Jain (1977), Jain et al. (1978))。分布定数モデルとしては双曲型、放物型、楕円型のいずれかを採用するわけであるが、座標 (x, y) における画像を $v(x, y)$ 、外乱 (モデリング誤差も含む) を $f(x, y)$ とすることにより、この3つの型はそれぞれ次のように表わされる。

双曲型モデル:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_{xy}(x, y) + a_1 v_x(x, y) + a_2 v_y(x, y) + a_3 v(x, y) &= f(x, y) \\ v(0, y) &= g(y) \quad (0 \leq y < \infty), \quad v(x, 0) = h(x) \quad (0 \leq x < \infty) \end{aligned}$$

放物型モデル:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v_y(x, y) - v_{xx}(x, y) + av(x, y) &= f(x, y) \\ v(x, 0) &= g(x), \quad v(0, y) = h_1(y), \quad v(L, y) = h_2(y) \end{aligned}$$

楕円型モデル:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + av(x, y) &= f(x, y) \\ v(x, 0) &= g_1(x), \quad v(x, L_1) = g_2(x), \quad v(0, y) = h_1(y), \quad v(L_2, y) = h_2(y) \end{aligned}$$

これらに有限差分近似操作

$$\begin{aligned} u_{ij} &= v(i\Delta x, j\Delta y) \\ v_x &\doteq (u_{ij} - u_{i-1j})/\Delta x, \quad v_y \doteq (u_{ij} - u_{ij-1})/\Delta y \\ v_{xy} &\doteq (u_{ij} - u_{ij-1} - u_{i-1j} + u_{i-1j-1})/\Delta x\Delta y \\ v_{xx} &\doteq (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j})/(\Delta x)^2 \\ v_{yy} &\doteq (u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1})/(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

を行なうことにより、以下の AR 型の離散型モデルが得られる。

因果的モデル (双曲型モデル):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_{ij} &= a_1 u_{i-1j} + a_2 u_{ij-1} + a_3 u_{i-1j-1} + \varepsilon_{ij} \\ a_1 &= -(1 + a_1 \Delta y) a_3, \quad a_2 = -(1 + a_2 \Delta x) a_3 \\ a_3 &= -(1 + a_1 \Delta y + a_2 \Delta x + a_3 \Delta x \Delta y)^{-1}, \quad \varepsilon_{ij} = -\Delta x \Delta y a_3 f_{ij} \end{aligned}$$

半因果的モデル (放物型モデル):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_{ij} &= a_1(u_{i-1j} + u_{i+1j}) + a_2 u_{ij-1} + \varepsilon_{ij} \\ a_1 &= \Delta y / (\Delta x^2 - 2\Delta y + \Delta y \Delta x^2 \alpha), \quad a_2 = \Delta x^2 / (\Delta x^2 - 2\Delta y + \Delta y \Delta x^2 \alpha) \\ \varepsilon_{ij} &= \{(\Delta y \Delta x^2) / (\Delta x^2 - 2\Delta y + \Delta y \Delta x^2 \alpha)\} f_{ij} \end{aligned}$$

非因果的モデル (楕円型モデル):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u_{ij} &= a_1(u_{i+1j} + u_{i-1j}) + a_2(u_{ij+1} + u_{ij-1}) + \varepsilon_{ij} \\ a_1 &= \Delta y^2 / (2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y^2 \alpha), \quad a_2 = \Delta x^2 / (2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y^2 \alpha) \\ \varepsilon_{ij} &= \{(-\Delta x^2 \Delta y^2) / (2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y^2 \alpha)\} f_{ij} . \end{aligned}$$

簡単で標準的な画像のモデルとして, 共分散関数 $R(k, l)$ が分離型となるもの

$$(3.7) \quad \begin{aligned} E[u_{ij}] &= 0 \\ R(k, l) &= E[u_{ij} \cdot u_{i+k, j+l}] = \sigma^2 \rho_1^{|k|} \rho_2^{|l|} \end{aligned}$$

が採用されることが多いが, これは特に上記の因果的モデルにおいて

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a_3 &= -a_1 a_2, \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \\ E[\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{i+k, j+l}] &= (1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \sigma^2 \delta_{k0} \delta_{l0} \end{aligned}$$

とおくことにより実現される (δ_{kl} はクロネッカーのデルタ). Attasi はこの分離型共分散関数を有する因果的モデルを一般化して次の Attasi 型状態変数モデルを作った (Attasi (1976)).

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x(i+1, j+1) &= A_3 x(i, j) + A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) + \varepsilon(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + D\varepsilon(i, j) \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad A_3 = -A_2 A_1 = -A_1 A_2 .$$

この Attasi 型 2次元システムは, A_1, A_2 の可換性の条件を緩和し, $\varepsilon(i, j) = Bu(i, j)$ とおき, $A_3 = -A_1 A_2$ の場合は $\xi(i, j) = x(i, j+1) - A_2 x(i, j)$, $A_3 = -A_2 A_1$ の場合は $\xi(i, j) = x(i+1, j) - A_1 x(i, j)$ のように新たに状態ベクトル $\xi(i, j)$ を導入することにより次の Roesser 型モデルに変換できる (DB を新たに D とおいた) (下西 他 (1982)).

(I) $A_3 = -A_1 A_2$ の場合:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi(i+1, j) \\ x(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ I & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ x(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j) . \end{aligned}$$

(II) $A_3 = -A_2 A_1$ の場合:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(i+1, j) \\ \xi(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i, j) \\ \xi(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j) . \end{aligned}$$

上記の Attasi 型 2次元システムにおいて, (I) の場合を若干一般化することにより前章のモデルが得られる. なお (II) の場合は (I) の場合の双対形と考えられ同様の議論が可能なので, 以後, 本稿では考えない.

4. 相対次数とパラメータ化表現

入出力情報だけから一種の追値制御系（目標信号に出力が追従する）を構成するには、現在加えた入力 u が2次元上でどの位置の出力に直接影響を与えるかを定量化しなければならない。これは1次元システムの相対次数（伝達関数の分母と分子の次数の差）に対応する概念である。2次元システムの相対次数は次のように定義される。

定義. 相対次数 m :

以下の条件下の時、相対次数を m とする。

(1) $d \neq 0$ のとき :

$$m = 0.$$

(2) $d = 0$ のとき :

$$(i) \quad C_3 A_3^l A_2 A_1^{N-l-1} b = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1, 1 \leq N \leq m-2)$$

$$C_2 A_1^N b = 0 \quad (0 \leq N \leq m-2)$$

$$(ii) \quad C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-l-2} b \neq 0 \quad (0 \leq l \leq m-2)$$

あるいは

$$C_2 A_1^{m-1} b \neq 0.$$

なお不等号が成立しない場合（マイナスになるとき）、その条件は除外する。また適応制御構成に当たってこの相対次数はあらかじめわかっているものとする。この相対次数 m の定義は、 $G(n)$ （詳細は次章）で時刻を定めたときに、 $G(i+j)$ 時点の出力 $y(i, j)$ に直接影響を与えるのが $G(i+j-m)$ 時点の入力であるシステムの相対次数を m とする解釈に基づいている。

注意 2. 制御対象のパラメータは未知であるとしているが、相対次数は既知と仮定した。相対次数は多くの場合、対象の特性を規定する物理法則や化学法則などから決まったり（たとえば Newton 力学は出力を位置、入力を力としたときの力学系の相対次数が 2 であることを規定するものである）、輸送遅れ系などにおいては対象のむだ時間（輸送遅れ時間）をサンプリング時間で割った値に対応しているといったことから、事前にわかっている場合が多い。上記の仮定はこの性質に基づくものである。しかし特に相対次数が未知の場合には、例えば宮里 他 (1982) などの考慮も必要になると思われるが、本稿では扱わないこととする。

上記の定義をもとにして、対象である 2 次元システムを入力 $u(i, j)$ 、出力 $y(i, j)$ 、参照用の信号 $y_r(i, j)$ のみを使った表現に置き換える。次の定理を得る。

定理 1. 相対次数が m であるシステム (2.1), (2.2) 式において (C_1, A_1) , (C_3, A_3) が可観測であると仮定する（可観測性については付録参照）。このとき任意に設定した $F_1 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$, $F_2 \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$, $g_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $g_2 \in \mathbf{R}^{n_2}$ （ただし F_1, F_2 は固有値が複素数平面上の単位円内に存在する単純行列であり、 (F_1, g_1) , (F_2, g_2) が可制御となるように設定するものとする。可制御性についても付録参照）に対し漸近的に次式を満足するパラメータベクトル θ_{kl} （次元は対応する v_{kl} と同じ）が存在する。

$$(4.1) \quad y(i, j) = \sum_{l=1}^m \theta_{1l}^T v_{11}(i-m+l, j-l) + \sum_{l=1}^m \theta_{2l}^T v_{12}(i-m+l, j-l) \\ + \theta_{31}^T v_{11}(i-m, j) + \theta_{32}^T v_{12}(i-m, j) + \sum_{k=1}^{n_1} \theta_{41k}^T v_{21k}(i, j-m)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n_1} \theta_{42k}^T v_{22k}(i, j-m) + \theta_{43}^T v_{23}(i, j-m) + \theta_{44}^T v_{24}(i, j-m) \\
& + \sum_{l=1}^m \theta_{5l} u(i-m+l-1, j-l+1) + \theta_6 u(i, j).
\end{aligned}$$

ただしベクトル $v_{11}(i, j), v_{12}(i, j) \in \mathbf{R}^{n_1}, v_{21k}(i, j), v_{22k}(i, j), v_{23}(i, j), v_{24}(i, j) \in \mathbf{R}^{n_2}$ ($1 \leq k \leq n_1$) は次に示す2次元システムの状態ベクトルである (状態変数フィルタ).

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad & \left. \begin{aligned}
v_{11}(i+1, j) &= F_1 v_{11}(i, j) + g_1 u(i, j) \\
v_{12}(i+1, j) &= F_1 v_{12}(i, j) + g_1 y_r(i, j) \\
v_{21k}(i, j+1) &= F_2 v_{21k}(i, j) + g_2 v_{11}^k(i, j) \\
v_{22k}(i, j+1) &= F_2 v_{22k}(i, j) + g_2 v_{12}^k(i, j) \\
v_{23}(i, j+1) &= F_2 v_{23}(i, j) + g_2 y(i, j) \\
v_{24}(i, j+1) &= F_2 v_{24}(i, j) + g_2 u(i, j).
\end{aligned} \right\} (1 \leq k \leq n_1)
\end{aligned}$$

ここに $v_{11}^k(i, j), v_{12}^k(i, j)$ はそれぞれ $v_{11}(i, j), v_{12}(i, j)$ の第 k 成分である.

注意3. 後で容易にわかるように $d \neq 0$ のときは $\theta_6 \neq 0$ となって, (4.1)式において $y(i, j)$ に $u(i, j)$ が対応する ($m=0$). また $d=0$ のときは $\theta_6=0$ となり $y(i, j)$ に $u(i-m+l-1, j-l+1)$ が対応する. これは $G(n)$ (次章で定義) で時刻を定めたとき, $G(i+j)$ 時点の出力に $G(i+j-m)$ 時点の入力が対応していることを示している. 前述の相対次数 m の定義はこの性質に基づいて定めたものである.

定理1の証明. まずシステムパラメータが全て既知であるとして, 2次元システムに対して同一次元オブザーバを構成する (雛元 (1981), Hinamoto et al. (1982), 雛元 他 (1984), 川路 他 (1983)).

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & \begin{bmatrix} z_1(i+1, j) \\ z_2(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - K_1 C_1 & 0 \\ A_2 - K_2 C_2 & A_3 - K_2 C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(i, j) \\ z_2(i, j) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_1 y_r(i, j) \\ K_2 y(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -K_2 d \end{bmatrix} u(i, j).
\end{aligned}$$

このとき推定誤差について

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad & \begin{bmatrix} e_1(i+1, j) \\ e_2(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(i+1, j) - x_h(i+1, j) \\ z_2(i, j+1) - x_v(i, j+1) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} A_1 - K_1 C_1 & 0 \\ A_2 - K_2 C_2 & A_3 - K_2 C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(i, j) \\ e_2(i, j) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

が成立する. 従って $A_1 - K_1 C_1$ と $A_3 - K_2 C_3$ の固有値の絶対値が1未満ならば推定誤差が零に収束することが示される (Roesser (1975)). (C_1, A_1) 及び (C_3, A_3) の可観測性より, K_1, K_2 を $A_1 - K_1 C_1$ と $F_1, A_3 - K_2 C_3$ と F_2 の固有値がそれぞれ全て一致するように設定することによりこれが保証される. 更に変数変換を行なうと (4.6)式が得られる.

$$\begin{aligned}
(4.5) \quad & T_1 z_1(i, j) = v_1(i, j), \quad T_1 A_1 - F_1 T_1 = T_1 K_1 C_1 \\
& T_2 z_2(i, j) = v_2(i, j), \quad T_2 A_3 - F_2 T_2 = T_2 K_2 C_3
\end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} v_1(i+1, j) \\ v_2(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ T_2(A_2 - K_2 C_2)T_1^{-1} & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(i, j) \\ v_2(i, j) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} T_1 K_1 y_r(i, j) \\ T_2 K_2 y(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 b \\ -T_2 K_2 d \end{bmatrix} u(i, j).$$

ここで上式右辺第1項の行列のブロック対角成分 F_1, F_2 はこちらで設定する既知の行列であることに注意する. 上式の $v_1(i, j), v_2(i, j)$ を状態変数フィルタを使って表現する. まず $v_1(i, j)$ を展開する.

$$(4.7) \quad \begin{aligned} v_1(i, j) &= F_1^i v_1(0, j) + \sum_{k=0}^{i-1} F_1^{i-k-1} T_1 b u(k, j) + \sum_{k=0}^{i-1} F_1^{i-k-1} T_1 K_1 y_r(k, j) \\ &= \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^i x_{1l} y_{1l}^T v_1(0, j) + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^{i-k-1} x_{1l} y_{1l}^T T_1 b u(k, j) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^{i-k-1} x_{1l} y_{1l}^T T_1 K_1 y_r(k, j). \end{aligned}$$

ただし $\lambda_{1l}, x_{1l}, y_{1l}$ ($1 \leq l \leq n_1$) はそれぞれ F_1 の固有値, 右固有ベクトル, 左固有ベクトルである. これに対し $v_{11}(i, j), v_{12}(i, j)$ も同様に展開できる.

$$(4.8) \quad v_{11}(i, j) = \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^i x_{1l} y_{1l}^T v_{11}(0, j) + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^{i-k-1} x_{1l} y_{1l}^T g_1 u(k, j)$$

$$(4.9) \quad v_{12}(i, j) = \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^i x_{1l} y_{1l}^T v_{12}(0, j) + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_{1l}^{i-k-1} x_{1l} y_{1l}^T g_1 y_r(k, j).$$

(4.7)~(4.9) 式の右辺第1項は $i \rightarrow \infty$ にともない零に収束する. 従ってこの項は無視し, さらに (F_1, g_1) の可制御性 (可制御性については付録参照) より $y_{1l}^T g_1 \neq 0$ ($1 \leq l \leq n_1$) となることに着目して以下の行列

$$(4.10) \quad \begin{aligned} L_{11} &= \sum_{l=1}^{n_1} \{(y_{1l}^T T_1 b) / (y_{1l}^T g_1)\} \cdot x_{1l} y_{1l}^T \\ L_{12} &= \sum_{l=1}^{n_1} \{(y_{1l}^T T_1 K_1) / (y_{1l}^T g_1)\} \cdot x_{1l} y_{1l}^T \end{aligned}$$

を $v_{11}(i, j), v_{12}(i, j)$ に作用させる. ここで $x_{1l}^T y_{1l} = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq n_1$) となることに着目すると漸近的に次式が成立する (漸近的に零に収束する初期値項を無視したため).

$$(4.11) \quad L_{11} v_{11}(i, j) + L_{12} v_{12}(i, j) = v_1(i, j).$$

上記の結果を $v_2(i, j)$ に代入して同様の展開を行なう.

$$(4.12) \quad \begin{aligned} v_2(i, j) &= \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2l}^i x_{2l} y_{2l}^T v_2(i, 0) + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2l}^{j-k-1} x_{2l} y_{2l}^T T_2 (A_2 - K_2 C_2) T_1^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{n_1} l_{p1}^i v_{p1}(i, k) + \sum_{p=1}^{n_1} l_{p2}^i v_{p2}(i, k) \right\} + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2l}^{j-k-1} x_{2l} y_{2l}^T T_2 K_2 y(i, k) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_{2l}^{j-k-1} x_{2l} y_{2l}^T T_2 K_2 d u(i, k). \end{aligned}$$

ただし $\lambda_{2l}, x_{2l}, y_{2l}$ ($1 \leq l \leq n_2$) は F_2 のそれぞれ固有値, 右固有ベクトル, 左固有ベクトルとする. また l_{p1}^i, l_{p2}^i ($1 \leq p \leq n_1$) はそれぞれ L_{11}, L_{12} の第 p 列ベクトルである. $v_{21p}(i, j), v_{22p}(i, j), v_{23}(i, j), v_{24}(i, j)$ も同様に展開してそれぞれに以下の行列 (ここでも (F_2, g_2) の可制御性から $y_{2l}^T g_2 \neq 0$ ($1 \leq l \leq n_2$) となることに注意を要する)

$$\begin{aligned}
 L_{21p} &= \sum_{l=1}^{n_2} \left\{ \left[\{ y_{2l}^T T_2 (A_2 - K_2 C_2) T_1^{-1} l_{11}^p \} / (y_{2l}^T g_2) \right] \cdot x_{2l} y_{2l}^T \right\} \\
 L_{22p} &= \sum_{l=1}^{n_2} \left\{ \left[\{ y_{2l}^T T_2 (A_2 - K_2 C_2) T_1^{-1} l_{12}^p \} / (y_{2l}^T g_2) \right] \cdot x_{2l} y_{2l}^T \right\} \\
 L_{23} &= \sum_{l=1}^{n_2} \left\{ (y_{2l}^T T_2 K_2) / (y_{2l}^T g_2) \right\} \cdot x_{2l} y_{2l}^T \\
 L_{24} &= \sum_{l=1}^{n_2} \left\{ (-y_{2l}^T T_2 K_2 d) / (y_{2l}^T g_2) \right\} \cdot x_{2l} y_{2l}^T
 \end{aligned} \quad (1 \leq p \leq n_1)$$

を作用させることにより (4.11) 式の導出と全く同様にして漸近的に次式が成立する (ここでも漸的に零に収束する初期値項は無視したため).

$$(4.14) \quad \sum_{p=1}^{n_1} L_{21p} v_{21p}(i, j) + \sum_{p=1}^{n_1} L_{22p} v_{22p}(i, j) + L_{23} v_{23}(i, j) + L_{24} v_{24}(i, j) = v_2(i, j).$$

以上の考察から 2 次元システムの状態変数を既知の状態変数フィルタの出力の線形変換の形式で表現できることがわかった. 一方, 対象の状態変数を介した入出力関係は次のようになる (ただし, ここでもマイナスになる添字については無視する. また次式の導出の詳細については付録参照).

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad y(i, j) &= \sum_{l=0}^{m-1} C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-l-1} x_h(i-m+l+1, j-l-1) + C_3 A_3^m x_v(i, j-m) \\
 &+ C_2 A_1^m x_h(i-m, j) + \sum_{l=0}^{m-2} C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-l-2} b u(i-m+l+1, j-l-1) \\
 &+ C_2 A_1^{m-1} b u(i-m, j) + d u(i, j).
 \end{aligned}$$

上式に状態変数の状態変数フィルタによる表現式を代入すると

$$\begin{aligned}
 \theta_{1l}^T &= C_3 A_3^{l-1} A_2 A_1^{m-l} T_1^{-1} L_{11}, & \theta_{2l}^T &= C_3 A_3^{l-1} A_2 A_1^{m-l} T_1^{-1} L_{12} & (1 \leq l \leq m) \\
 \theta_{31}^T &= C_2 A_1^m T_1^{-1} L_{11}, & \theta_{32}^T &= C_2 A_1^m T_1^{-1} L_{12} \\
 (4.16) \quad \theta_{41k}^T &= C_3 A_3^m T_2^{-1} L_{21k}, & \theta_{42k}^T &= C_3 A_3^m T_2^{-1} L_{22k} & (1 \leq k \leq n_1) \\
 \theta_{43}^T &= C_3 A_3^m T_2^{-1} L_{23}, & \theta_{44}^T &= C_3 A_3^m T_2^{-1} L_{24}, & \theta_{51} &= C_2 A_1^{m-1} b \\
 \theta_{5l} &= C_3 A_3^{l-2} A_2 A_1^{m-l} b & (2 \leq l \leq m), & & \theta_6 &= d
 \end{aligned}$$

とおくことにより求めるパラメータ化表現 (4.1) 式が得られる.

(証明終)

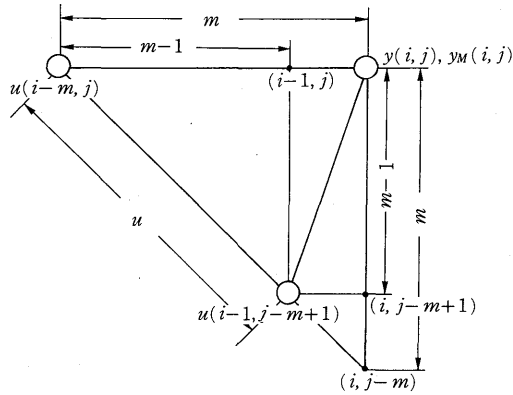
定理 1 で求めたパラメータ化表現は, システムパラメータ θ が既知の場合に入出力情報だけから, 出力の相対次数分の未来値を漸的に推定する一種の予測器になっている.

5. 適応制御

本章では定理 1 の成立も含むある条件下で Lyapunov の意味で, 出力誤差の漸近安定性が保証される適応制御系を構成する. 証明は一種の Lyapunov 関数の候補を導入し, これの差分が負定となるように適応則, 制御則を決定することにより行なわれる.

特に $d \neq 0$ の場合は宮里 (1986) で扱われているので, 本稿では $d=0$ の場合に限って話を進める. この場合, 容易に $\theta_{44}=0, \theta_6=0$ であることがわかる. 従って以後, 本稿では θ_{44}, θ_6 及び対応する $v_{24}(i, j)$ は考えないこととする (相対次数はあらかじめ既知と仮定したから).

2 次元システムでは 1 次元システムのように因果律を定義するのが必ずしも自明ではない.

Fig. 2. Input-output relation in case of relative degree m

(i, j) と (i', j') の間で $i \leq i'$ かつ $j \leq j'$ の場合に (つまり $(i, j) \leq (i', j')$) 前者が後者に先んじている (計算可能な順序が前者の方が先ということ。ただし同時刻も含む) ことが言えるだけで、このような大小関係が定められないものは因果律も定められない。しかし原点から到達できる最小計算ステップ数で因果律を導入すると、 $G(n) = \{(i, j) : i+j=n, i, j \geq 0\}$ として n の大小関係で因果律を定めることができる。このように考えると、(4.1) 式において 1 つの出力 $y(i, j)$ に対し複数の入力 $u(i-m+l-1, j-l+1)$ ($1 \leq l \leq m$) が対応しているが、これらは全て $G(i+j-m)$ に属する同時刻の (原点からの最小計算ステップ数が同じ) 信号であることがわかる。

一方、入力は状態変数フィルタとシステムパラメータの推定値の関数であり、システムパラメータの推定値は真値に収束するように逐次定められる。その際、各々の時点において新たな入力がそれまでに計算されている状態変数フィルタとシステムパラメータの推定値のみを使って (矛盾することなく) 計算を進められるように、制御系全体 (入力, 出力, 状態変数, システムパラメータの推定値) の計算順序を定める必要がある。このため、水平方向と垂直方向の 2 つの計算順序を設定し、それぞれに対応して入力を構成する方法をとる。以下に垂直方向及び水平方向に計算順序を設定した場合の構成法を、定理 2, 定理 3 として示す。簡単のためそれぞれにおいて θ_{51}, θ_{5m} が非零としているが、容易にそうでない場合に拡張できる。

(I) 垂直方向に計算順序を設定する場合:

システムパラメータと状態変数をまとめて次のように表わす。

システムパラメータ (推定すべき未知量, 推定値を $\hat{\Theta}$ とする)

$$(5.1) \quad \hat{\Theta} = [\theta_{11}^T, \dots, \theta_{1m}^T, \theta_{21}^T, \dots, \theta_{2m}^T, \theta_{31}^T, \theta_{32}^T, \theta_{411}^T, \dots, \theta_{41n_1}^T, \theta_{421}^T, \dots, \theta_{42n_1}^T, \theta_{43}^T, \theta_{51}^T, \dots, \theta_{5m}^T]^T$$

状態変数 (設計者が $(F_1, g_1), (F_2, g_2)$ を設定して (4.2) 式に従って更新していく既知量)

$$(5.2) \quad \zeta_v(i, j) = [v_{11}(i+1, j-1)^T, \dots, v_{11}(i+m, j-m)^T, v_{12}(i+1, j-1)^T, \dots, v_{12}(i+m, j-m)^T, v_{11}(i, j)^T, v_{12}(i, j)^T, v_{211}(i+m, j-m)^T, \dots, v_{21n_1}(i+m, j-m)^T, v_{221}(i+m, j-m)^T, \dots, v_{22n_1}(i+m, j-m)^T, v_{23}(i+m, j-m)^T, u(i, j), \dots, u(i+m-1, j-m+1)]^T$$

このとき以下の定理が成立する。

定理 2. 定理 1 の成立に加え、次の仮定をおく。

$$(i) \quad |u(i-m+l-1, j-l+1)| \leq L_1 + L_2 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i,j)} |y(h, k)|, \quad 1 \leq l \leq m$$

$$0 \leq L_1 < \infty, \quad 0 < L_2 < \infty$$

$$(ii) \quad |\sigma(A_1)| < 1, \quad \sigma: \text{全ての固有値}$$

$$(iii) \quad \theta_{51} \neq 0.$$

Θ の推定値 $\hat{\Theta}(i, j)$ を以下の適応則に従って定め、さらに以下の制御則を適用することにより、

$$(5.3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} e(i, j) = 0$$

が成立する。

適応則

$$(5.4) \quad \hat{\Theta}(i, j) = \hat{\Theta}(i-m, j) - a(i, j) \frac{e(i, j)}{1 + \zeta_v(i-m, j)^T \zeta_v(i-m, j)} \zeta_v(i-m, j)$$

$$e(i, j) = y_M(i, j) - y(i, j).$$

ただし $a(i, j)$ は任意に δ_1 ($0 < \delta_1 < 2$), δ_2 ($0 < \delta_2 < 2$) を定めたときに ($\delta_1 < 2 - \delta_2$),

$$(5.5) \quad 0 < \delta_1 < a(i, j) < 2 - \delta_2 < 2$$

となり、さらに常に $\hat{\theta}_{51}(i, j) \neq 0$ となるように選ぶものとする。

制御則

$$(5.6) \quad y_M(i+m, j) = \hat{\Theta}(i, j)^T \zeta_v(i, j).$$

あるいは、より具体的に

$$(5.7) \quad u(i, j) = \{y_M(i+m, j) - \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_{1l}(i, j)^T v_{11}(i+l, j-l) - \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_{2l}(i, j)^T v_{12}(i+l, j-l) - \hat{\theta}_{31}(i, j)^T v_{11}(i, j) - \hat{\theta}_{32}(i, j)^T v_{12}(i, j) - \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\theta}_{41k}(i, j)^T v_{21k}(i+m, j-m) - \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\theta}_{42k}(i, j)^T v_{22k}(i+m, j-m) - \hat{\theta}_{43}(i, j)^T v_{23}(i+m, j-m) - \sum_{l=2}^m \hat{\theta}_{5l}(i, j) u(i+l-1, j-l+1)\} / \hat{\theta}_{51}(i, j)$$

となる。ただし (i, j) において $y_M(i+m, j)$ (一種の未来値) は既知とする。

$y(i, j)$, $y_r(i, j)$, $u(i, j)$, $\zeta_v(i, j)$, $\hat{\Theta}(i, j)$ の計算は $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$, ..., $G(n)$, ... の順に行なう。同じ $G(k)$ の中では $(i, j): i+j=k; (k, 0), (k-1, 1), (k-2, 2), \dots, (0, k)$ と垂直座標の値が小さいものから計算する。このとき (5.7) 式の中に現われる $u(i, j)$ の計算に必要な情報 $\zeta_v(i, j)$ と $\hat{\Theta}(i, j)$ はすでに計算済みであるので、矛盾なく計算を進められる。

注意 4. 規範モデルの出力 $y_M(i, j)$ の未来値は既知とした。工学上のこのような問題においては目標値があらかじめ与えられている場合が多いから、上記の仮定は問題がないと思われる。

定理 2 の証明 システムパラメータの同定誤差を次のように定める。

$$(5.8) \quad \tilde{\Theta}(i, j) \equiv \hat{\Theta}(i, j) - \Theta.$$

同定誤差のノルムの2乗関数 $V(i, j)$ を定義する.

$$(5.9) \quad V(i, j) \equiv \tilde{\Theta}(i, j)^T \tilde{\Theta}(i, j).$$

適応則と制御則を考慮して $(i-m, j) \rightarrow (i, j)$ に沿っての $V(i, j)$ の差分を計算する.

$$(5.10) \quad V(i, j) - V(i-m, j) = \frac{e(i, j)^2 a(i, j)}{1 + \zeta_v(i-m, j)^T \zeta_v(i-m, j)} \cdot \left\{ -2 + a(i, j) \frac{\zeta_v(i-m, j)^T \zeta_v(i-m, j)}{1 + \zeta_v(i-m, j)^T \zeta_v(i-m, j)} \right\} \leq 0.$$

ただしここで

$$(5.11) \quad e(i, j) = \tilde{\Theta}(i-m, j)^T \zeta_v(i-m, j)$$

を利用した. $V(i, j)$ は非負であり $(i-m, j) \rightarrow (i, j)$ に沿っての差分が非正になることからその方向に収束値を有する.

$$(5.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V(i+nm, j) \quad (0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j).$$

従って上記の差分値は零に収束する. ここに (5.10) 式の右辺中括弧の中は $\zeta_v(i, j)$ の有界, 非有界にかかわらず常に零より小さいから

$$(5.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(i+mn, j)^2}{1 + \zeta_v(i+mn-m, j)^T \zeta_v(i+mn-m, j)} = 0 \quad (0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j)$$

が成立する. 一方, 状態ベクトル $\zeta_v(i+mn-m, j)$ については仮定と付録より

$$(5.14) \quad \|\zeta_v(i-m, j)\| \leq N_1 + N_2 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i,j)} |e(h, k)| \quad (0 \leq N_1 < \infty, 0 < N_2 < \infty)$$

が成立する. 上式をもとにして (5.13) 式について解析する. 次の2通りの場合が考えられる.

- (1) $e(i, j)$ が有界: このとき (5.14) 式より $\zeta_v(i-m, j)$ も有界となって (5.3) 式が成立する.
 - (2) $e(i, j)$ は特定の j について非有界: このとき $\zeta_v(i, j)$ も同様に非有界となる.
- (1) の場合は問題がないが, (2) の場合は次の条件を満たす発散する部分列がとれる.

$$\{i_n\}: (n=0, 1, 2, \dots); i=0, 1, 2, \dots \text{ のなかの部分列, } \exists j$$

$$(i) \quad |e(i, j)| \leq |e(i_n, j)|, \forall i \leq i_n$$

$$(ii) \quad |e(i_n, j)| = \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i_n,j)} |e(h, k)|.$$

上記の記述はある j (垂直座標) について, i_n (水平座標) 方向に単調増加で, $(0, 0), (i_n, 0), (0, j), (i_n, j)$ を含む長方形の領域で常に最大となるような部分列 $|e(i_n, j)|$ がとれることをいっている. このとき (5.13) 式は以下のように評価される.

$$(5.15) \quad \frac{|e(i_n, j)|}{\{1 + \zeta_v(i_n-m, j)^T \zeta_v(i_n-m, j)\}^{1/2}} \geq \frac{|e(i_n, j)|}{1 + \|\zeta_v(i_n-m, j)\|} \geq \frac{|e(i_n, j)|}{1 + N_1 + N_2 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i_n,j)} |e(h, k)|} = \frac{|e(i_n, j)|}{1 + N_1 + N_2 |e(i_n, j)|} \rightarrow \frac{1}{N_2} > 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

これは (5.13) 式に矛盾する. よって (1) の場合しかありえない.

(証明終)

(II) 水平方向に計算順序を設定する場合：
表記の便宜のため状態変数を次のように書き換える。

$$(5.16) \quad \zeta_h(i, j) = [v_{11}(i-m+2, j+m-2)^T, \dots, v_{11}(i+1, j-1)^T, \\ v_{12}(i-m+2, j+m-2)^T, \dots, v_{12}(i+1, j-1)^T, \\ v_{11}(i-m+1, j+m-1)^T, v_{12}(i-m+1, j+m-1)^T, \\ v_{211}(i+1, j-1)^T, \dots, v_{21n_1}(i+1, j-1)^T, \\ v_{221}(i+1, j-1)^T, \dots, v_{22n_1}(i+1, j-1)^T, \\ v_{23}(i+1, j-1)^T, u(i-m+1, j+m-1), \dots, u(i, j)]^T.$$

このとき次の定理が成立する。

定理3. 定理1の成立に加え次の仮定をおく。

- (i) $\theta_{5m} \neq 0$
- (ii) 状態変数が一様有界である。

上記の仮定のもとで以下の適応則と制御則により次式が成立する。

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e(i+n, j+n(m-1)) = 0.$$

適応則

$$\hat{\Theta}(i, j) = \hat{\Theta}(i-1, j-m+1) \\ - a(i, j) \frac{e(i, j)}{1 + \zeta_h(i-1, j-m+1)^T \zeta_h(i-1, j-m+1)} \zeta_h(i-1, j-m+1).$$

$a(i, j)$ は定理2と同じ条件((5.5)式)を満足し、また今回は $\hat{\theta}_{5m}(i, j) \neq 0$ とするよう選ぶものとする。

制御則

$$(5.18) \quad y_M(i+1, j+m-1) = \hat{\Theta}(i, j)^T \zeta_h(i, j).$$

あるいは

$$(5.19) \quad u(i, j) = \{y_M(i+1, j+m-1) - \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_{1l}(i, j)^T v_{11}(i-m+1+l, j+m-1-l) \\ - \sum_{l=1}^m \hat{\theta}_{2l}(i, j)^T v_{12}(i-m+1+l, j+m-1-l) \\ - \hat{\theta}_{31}(i, j)^T v_{11}(i-m+1, j+m-1) \\ - \hat{\theta}_{32}(i, j)^T v_{12}(i-m+1, j+m-1) - \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\theta}_{41k}(i, j)^T v_{21k}(i+1, j-1) \\ - \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\theta}_{42k}(i, j)^T v_{22k}(i+1, j-1) - \hat{\theta}_{43}(i, j)^T v_{23}(i+1, j-1) \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \hat{\theta}_{5l}(i, j) u(i-m+l, j+m-l)\} / \hat{\theta}_{5m}(i, j)$$

とする。(5.19)式は(5.18)式の別表現である。今回も $y_M(i+1, j+m-1)$ (未来値)が既知とする。

計算の順序は $G(0), G(1), \dots, G(n), \dots$ の順に計算するのは同じであるが、 $G(k)$ においては $i+j=k$; $(0, k), (1, k-1), (2, k-2), \dots, (k, 0)$ と水平座標の値の小さい順に計算する。このときも(5.19)式中に現われる $u(i, j)$ の計算に必要な情報 $\zeta_h(i, j)$ と $\hat{\Theta}(i, j)$ はすでに計算済みであって、矛盾なく計算を進められる。

定理3の証明 同様に $V(i, j)$ を定め $(i-1, j-m+1) \rightarrow (i, j)$ についての差分を計算する.

$$(5.20) \quad \begin{aligned} & V(i, j) - V(i-1, j-m+1) \\ &= \frac{e(i, j)^2 a(i, j)}{1 + \zeta_h(i-1, j-m+1)^T \zeta_h(i-1, j-m+1)} \\ & \quad \cdot \left\{ -2 + a(i, j) \frac{\zeta_h(i-1, j-m+1)^T \zeta_h(i-1, j-m+1)}{1 + \zeta_h(i-1, j-m+1)^T \zeta_h(i-1, j-m+1)} \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

定理2の証明と同じようにして,

$$(5.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V(i+n, j+n(m-1))$$

の存在が示され, これから上記の差分値の零収束性, 従って

$$(5.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(i+n, j+n(m-1))^2}{1 + \zeta_h(i+n-1, j+(n-1)(m-1))^T \zeta_h(i+n-1, j+(n-1)(m-1))} = 0$$

が成立する. 定理3では状態変数はあらかじめ一様有界と仮定したから, 上式より (5.17) 式が得られる. (証明終)

定理2においては仮定 (i)~(iii) より状態変数の一様有界性と着目している出力誤差の零収束性が導かれる. 特に仮定 (i) は通常の1次元システムの場合の零点 (伝達関数の分子多項式の零点) が複素平面で単位円内のみに存在する条件, 換言すると逆システムが漸近安定となる条件を2次元システムの場合に置き換えたものである. Attasi型2次元システムは特性多項式が2変数完全分離となるが, その逆システムの特性多項式は2変数完全分離とならない (下西他 (1982)). 従って安定性と結びつけた形式で零点を定義できない. 仮定 (i) が仮定 (ii) のように明確な表現となっていないのはこの理由による. 一方, 定理3では最初から状態変数の一様有界性を仮定して証明を行なっている. この場合は適応則が水平座標の方向にも垂直座標の方向にも更新されるため, 定理2の証明の最後の部分のように一方の座標を固定して安定解析できない. 従って定理2と同様の仮定をおいても (5.22) 式より (5.17) 式が導けないために一様有界性の仮定をおいた. 以上述べた安定性の議論と結びつけた零点の定義と安定解析の適用範囲の拡張は今後の課題である.

6. 数値実験

$m=1$ と $m=2$ の簡単な場合について数値実験を行なった. 相対次数の定義より $m=1$ の場合には $C_2 b \neq 0$ となり, $m=2$ の場合には $C_2 b = 0$ かつ $C_3 A_2 b \neq 0$ あるいは $C_2 A_1 b \neq 0$ となる. 特に, $m=1$ の場合は定理2のみ適用可能となる. 以下, $m=1$ の時に定理2を適用した場合 (Case I), $m=2$ で $C_2 = 0$ のときに (狭義の Attasi 型に近い) 定理3を適用した場合 (Case II), $m=2$ かつ $C_2 \neq 0$ のときに (複数の入力と同時に関与) 定理2を適用した場合 (Case III) について示す.

Case I. 2次元システム: ($n_1 = n_2 = 1$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_h(i+1, j) \\ x_v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j) \\ \begin{bmatrix} y_r(i, j) \\ y(i, j) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

状態変数フィルタ：

$$F_1=0.3, \quad F_2=0.4, \quad g_1=g_2=1,$$

規範モデル：

$$y_M(i, j) = \cos\{0.172 |i-j|/(i+j)\} \cdot \sin\{0.172(i+j)\},$$

設定パラメータ：

$$a(i, j) = 1.5$$

$$\hat{\theta}_{s1}(0, j) = 5, \quad \text{他の可調整パラメータの初期値はすべて零.}$$

また状態変数の初期値はすべて零とした。計算の順序は $G(0), G(1), G(2), \dots, G(50)$ として、結果は (i, j) の垂直座標 j について加算平均を計算して、それを水平座標 i についてプロットした。

$$\bar{e}(i) = \left\{ \sum_{j=0}^{51-i} e(i, j)^2 / (51-i) \right\}^{1/2}.$$

Case II. 2次元システム： $(n_1=n_2=1)$

$$\begin{bmatrix} x_h(i+1, j) \\ x_v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$\begin{bmatrix} y_r(i, j) \\ y(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix},$$

規範モデル：

$$y_M(i, j) = \cos\{0.172 |i-j|/(i+j)\} \cdot \ln(1+i+j).$$

計算の順序は同様に $G(0), G(1), \dots, G(100)$ として結果は簡単のため $e(i, i)$ ($i=0 \sim 50$) について示した。状態変数フィルタと設定パラメータは Case I と同じ。ただし制御パラメータの中の $\hat{\theta}_{s1}(i, j)$ は零とにおいて ($C_2=0$ より $\theta_{s1}=0$ となるため。この場合、 $C_2=0$ という情報はわかっているものとした)、 $\hat{\theta}_{s2}(i, j)$ を使って (初期値は Case I と同様に 5 とした) 入力を計算した。

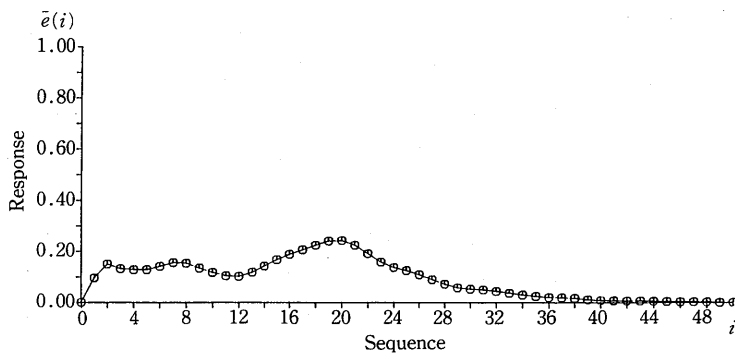


Fig. 3. Resulting response curve in Case I

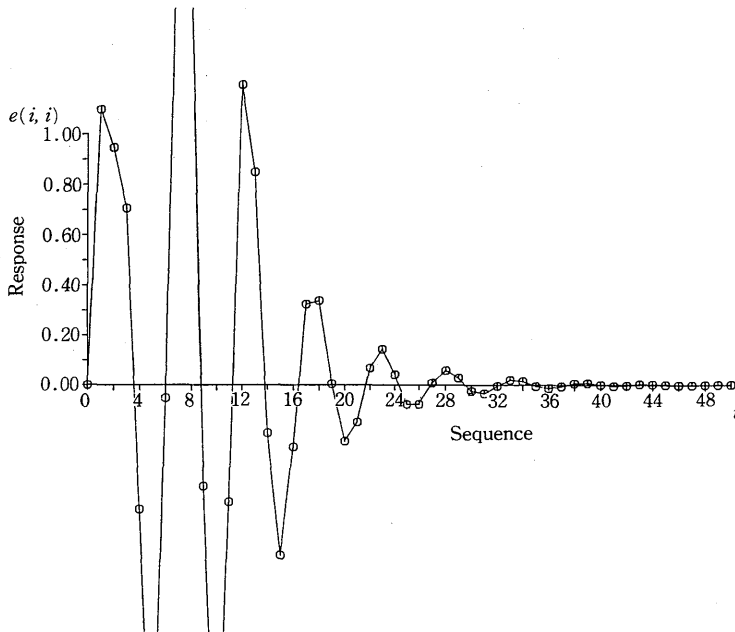


Fig. 4. Resulting response curve in Case II

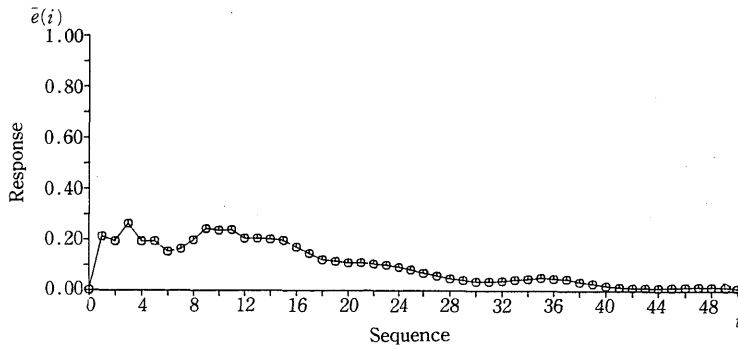


Fig. 5. Resulting response curve in Case III

Case III. 2次元システム：($n_1=2, n_2=1$)

$$\begin{bmatrix} x_{n1}(i+1, j) \\ x_{n2}(i+1, j) \\ x_v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n1}(i, j) \\ x_{n2}(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$\begin{bmatrix} y_r(i, j) \\ y(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n1}(i, j) \\ x_{n2}(i, j) \\ x_v(i, j) \end{bmatrix},$$

状態変数フィルタ：

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = 0.8, \quad g_2 = 0.1,$$

規範モデル：

$$y_M(i, j) = \cos\{0.172 |i-j| / (i+j)\} \cdot \sin\{0.172(i+j)\}.$$

状態変数フィルタと設定パラメータは Case I と同様。相対次数は Case II と同様に 2 であるが、制御パラメータの中の $\hat{\theta}_{51}(i, j)$, $\hat{\theta}_{52}(i, j)$ はともに非零となる。それぞれの初期値はこれまでと同様に 5 とした。なお、計算の順序と結果の表示は Case I と同じ。

Figure 3~5 にそれぞれの結果を示す。前章の定理はある条件下で出力誤差の Lyapunov の意味における漸近安定性を保証するものであるが、収束特性については述べていない。数値実験からは総じて収束特性はよくないが、誤差の零収束性については検証された。設計パラメータ（適応ゲイン $a(i, j)$ 、状態変数フィルタ (F_1, g_1) , (F_2, g_2) など）を適切に選ぶことによりさらに収束特性は向上すると考えられるが、これについては今後の課題としたい。

7. 結 言

Attasi 型 2 次元システムに対し、設定した出力が任意の規範モデルの発生する一様有界な 2 次元場の信号に逐次同定しながら適応的に追値する適応制御系を構成した。一般に線形 2 次元システムの安定性は狭義単調増加な (i, j) の部分列に対して論じる場合が多いが (Roesser (1975)), 適応制御系の場合はその非線形性のために単調増加な (i, j) の特定の部分列 (前章の例題では $(i, j) \rightarrow (i+1, j) \rightarrow (i+2, j) \rightarrow \dots$ や、 $(i, j) \rightarrow (i+1, j+1) \rightarrow (i+2, j+2) \rightarrow \dots$ など) に対してしか漸近安定性が保証されない。本稿で、それが出力に直接影響を与える入力の 2 次元場での相対的な位置、及びそれに付随して決まる可調整パラメータの更新の方向によって決まることが明らかになった。また相対次数も深く関与していることもわかった。

なお、本稿では対象のパラメータだけでなく状態変数も多くは未知であるという設定をおいた。測定可能な信号は制御量 (出力) と操作量 (入力) のほかに参照用の 1 信号だけとしたため、制御系構成に必要な残りの信号は測定可能な信号よりオブザーバを使って再構成した。このオブザーバの安定解析も含めて、2 次元システムの安定解析を固有値の概念と結びつけてできるのは、システム行列がブロック三角構造を有する場合、つまり伝達関数の 2 変数が完全分離形式となる場合に限られる (Kaczorek (1983))。本稿で対象を Attasi 型に限定したのもオブザーバ構成の必要性とその安定解析を固有値の概念により行なったためである。より多くの状態変数が測定可能であるとするによりこれらの制約は一部緩和されると考えられる。ただし、これらの仮定は適用する実際の問題に応じて考慮する必要があるであろう。本手法が自然に適用できた問題として、繰り返し型の学習制御問題がある (宮里 (1985), 宮里 他 (1987))。この場合、あるいは一部の分布定数系、むだ時間系に適用する場合には適当な因果律を設定できるが、画像のモデルとして考えた場合、非因果的なシステム表現に拡張する必要性もあると思われる。しかしこのためには 2 次元システムの状態変数による表示そのものの根本的見直しが不可欠であろう。

最後に、本稿では確率的外乱の存在しない場合に議論を限った。しかし同様の議論は、2 次元場に Martingale Difference Sequence を拡張し、Modified Least Square Method (数値的安定性を保証する型のもの) を導入することにより、確率系にも適用できると思われる (Chen

(1985), Goodwin et al. (1984), Sin et al. (1982)). その際, 基本的な制御系の構成は本稿の場合とほとんど変わることがないと思われるが, これについては今後の課題としたい.

謝 辞

日頃御指導頂く東京大学 北森俊行教授, 本研究を始める機会を与えてくださった東京大学 森下巖教授, さらに本研究の継続の場を与えてくださった千葉工業大学 大島康次郎教授に深謝します。また, 本研究の「統計数理」への投稿を勧めてくださった統計数理研究所 伊藤栄明教授, 多くの貴重なコメントを頂いた査読者の方々に心よりお礼申し上げます。

参 考 文 献

- Attasi, S. (1976). Modelling and recursive estimation for double indexed sequences, *System Identification Advances and Case Studies* (eds. K. Mehra and D.G. Lainiotis), Academic Press, New York.
- Chen, H.F. (1985). *Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems*, Wiley, New York.
- Eising, R. (1978). Realization and stabilization of 2-D systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-23**, 793-799.
- Eising, R. (1980). State-space realization and inversion of 2-D systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-27**, 612-619.
- Eising, R. and Hautus, M.L. (1981). Realization algorithms for systems over a principal ideal domain, *Math. Systems Theory*, **14**, 353-366.
- Goodwin, G.C., Ramadge, P.J. and Cains, P.E. (1980). Discrete time multivariable adaptive control, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-25**, 449-456.
- Goodwin, G.C. and Sin, K.S. (1984). *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall, England.
- 雛元孝夫 (1981). 2次元システムの状態観測器, システムと制御, **25**, 576-577.
- Hinamoto, T., Fairman, F.W. and Shimonishi, J. (1982). Stabilization of 2D filters using 2D observers, *Internat. J. Systems Sci.*, **13**, 177-191.
- 雛元孝夫, 下西二郎, 前川禎男 (1984). 2次元システムに対する外乱分離オブザーバの設計, 計測自動制御学会論文集, **20**, 294-299.
- 市川邦彦, 金井喜美雄, 鈴木 隆, 田村捷利 (1984). 適応制御, 昭晃堂.
- 伊藤正美, 木村英紀, 細江繁幸 (1978). 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会.
- Jain, A.K. (1977). Partial differential equation and finite difference in image processing, part I: Image representation, *J. Optim. Theory Appl.*, **23**, 65-91.
- Jain, A.K. and Jain, J.R. (1978). Partial differential equation and finite difference method in image processing, part II: Image restoration, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-23**, 817-833.
- Kaczorek, T. (1983). Assignment problem in two dimensional linear systems, *Internat. J. Control*, **37**, 183-190.
- 川路茂保, 阿波祐二 (1983). 2次元システムに対する状態観測器, 計測自動制御学会論文集, **19**, 773-779.
- Landau, Y.D. (1979). *Adaptive Control, The Model Reference Approach*, Marcel Decker.
- Landau, I.D., 富塚誠義 (1981). 適応制御システムの理論と実際, オーム社.
- 宮里義彦 (1985). 学習制御系の構成法 (2次元適応制御の応用として), 第28回自動制御連合講演会予稿集, 51-52.
- 宮里義彦 (1986). Attasi型2次元システムのモデル規範形適応制御, 計測自動制御学会論文集, **22**, 514-520.
- 宮里義彦, 北森俊行 (1982). 相対次数に依存しないモデル規範形適応制御系の構成法, 計測自動制御学会論文集, **18**, 1152-1158.
- 宮里義彦, 大島康次郎 (1987). 学習制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **23**, 576-583.
- Paraskevopoulos, P.N. (1979). Eigenvalue assignment of linear multivariable 2-dimensional systems, *Proc. IEEE*, **126**, 1204-1208.

- Paraskevopoulos, P.N. and Stravroulakis, P. (1982). Decoupling of linear multivariable two-dimensional systems via state feedback, *Proc. IEEE*, **129**, 15-20.
- Roesser, R.P. (1975). A discrete state-space model for linear image processing, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-20**, 1-10.
- 下西二郎, 雛元孝夫, 前川禎男 (1982). Attasi型2次元システムに対する逆システムの構成, 計測自動制御学会論文集, **18**, 898-904.
- Sin, K.S. and Goodwin, G.C. (1982). Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm, *Automatica*, **18**, 315-321.
- Yasuda, Y. (1981). On the synthesis of model-following two-dimensional digital systems, *Internat. J. Control*, **34**, 201-217.

付 録

(1) 2次元場における大小関係:

2次元場における等号, 不等号を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
 (A.1) \quad & (h, k) \leq (i, j) \Leftrightarrow h \leq i \quad \text{and} \quad k \leq j \\
 & (h, k) = (i, j) \Leftrightarrow h = i \quad \text{and} \quad k = j \\
 & (h, k) < (i, j) \Leftrightarrow (h, k) \leq (i, j) \quad \text{and} \quad (h, k) \neq (i, j).
 \end{aligned}$$

上記の等号, 不等号に従って単調増加性や順序構造の概念を導入する. またこの順序にあわせて因果律も規定する. 本稿ではさらに $G(n)$ によっても因果律を定めているが, これは元の等号, 不等号だけでは因果律の定まらないもの同士の間関係を新たに規定するものであって, 上記の大小関係に反するものではない.

(2) 可制御性, 可観測性:

$F \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $g \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, 状態ベクトル $x(k) \in \mathbf{R}^n$ として以下のシステムを考える.

$$(A.2) \quad x(k+1) = Fx(k) + gu(k)$$

$$(A.3) \quad y(k) = cx(k)$$

任意に状態ベクトル x_f が与えられたとき, 高々 n ステップで任意の初期状態から x_f に到達させるような入力の系列 $u(k)$ ($0 \leq k \leq n-1$) が存在するときにシステム (F, g) を可制御であるという.

また, $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ を測定することにより (入力 $u(k)$ は測定可能とする) 初期状態ベクトル $x(0)$ が一意に決定されるとき, システム (c, F) を可観測であるという.

なお本稿で必要となる可制御性, 可観測性より導かれるいくつかの性質についてはたとえば伊藤 他 (1978), 第1章3節, pp. 33~42, 第2章2節, pp. 68~80 を参照のこと.

(3) (4.15) 式の導出:

(4.15) 式は, $y(i, j)$ の定義式 (2.2) 式に (2.1) 式を代入し展開して, 結果の式に入力項が現われない (入力にかかる係数が零になる) 場合は再度 (2.1) 式を代入し, 最終的に結果の式に入力項が現われる (入力にかかる係数のうち少なくとも一つが非零となる) まで計算を繰り返すことにより得られる. この計算回数が相対次数に対応する. 例えば, (2.2) 式だけの場合は相対次数 $m=0$ となつて

$$(A.4) \quad y(i, j) = C_2 x_n(i, j) + C_3 x_v(i, j) + du(i, j)$$

(2.1) 式を代入するのが1回つまり $m=1$ の場合には

$$(A.5) \quad y(i, j) = C_3 A_2 x_n(i, j-1) + C_3 A_3 x_v(i, j-1) + C_2 A_1 x_n(i-1, j) + C_2 b u(i-1, j)$$

代入が2回, $m=2$ の場合には

$$(A.6) \quad y(i, j) = C_3 A_2 A_1 x_h(i-1, j-1) + C_3 A_3 A_2 x_h(i, j-2) + C_3 A_3^2 x_v(i, j-2) \\ + C_2 A_1^2 x_h(i-2, j) + C_3 A_2 b u(i-1, j-1) + C_2 A_1 b u(i-2, j)$$

となる。これを一般の場合について示すために代入を m 回繰り返した後, (4.15) 式が得られたが, 相対次数が $m+1$ であったために入力にかかる係数がすべて零, つまり定義の (2) の (i), (ii) 及び

$$(A.7) \quad C_3 A_3^l A_2^{m-l-2} = 0 \quad (0 \leq l \leq m-2) \\ C_2 A_1^{m-1} b = 0$$

が成立したとして(相対次数が m でなく $m+1$ であると仮定するため), (4.15) 式中の入力の係数をすべて零とおいて再度 (2.1) 式を代入する。

$$(A.8) \quad y(i, j) = \sum_{l=0}^{m-1} C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-1-l} \{ A_1 x_h(i-(m-l-1)-1, j-(l+1)) \\ + b u(i-(m-l-1)-1, j-(l+1)) \} \\ + C_3 A_3^m \{ A_2 x_h(i, j-m-1) + A_3 x_v(i, j-m-1) \} \\ + C_2 A_1^m \{ A_1 x_h(i-m-1, j) + b u(i-m-1, j) \} \\ = \sum_{l=0}^{m-1} C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-l} x_h(i-(m-l-1)-1, j-(l+1)) \\ + C_3 A_3^m A_2 x_h(i, j-m-1) + C_3 A_3^{m+1} x_v(i, j-m-1) \\ + C_2 A_1^{m+1} x_h(i-m-1, j) + C_2 A_1^m b u(i-m-1, j) \\ + \sum_{l=0}^{m-1} C_3 A_3^l A_2 A_1^{m-1-l} b u(i-(m-l-1)-1, j-(l+1)) \\ = \sum_{l=0}^{(m+1)-1} C_3 A_3^l A_2 A_1^{(m+1)-l-1} x_h(i-(m+1)+l+1, j-l-1) \\ + C_3 A_3^{m+1} x_v(i, j-(m+1)) + C_2 A_1^{m+1} x_h(i-(m+1), j) \\ + \sum_{l=0}^{(m+1)-2} C_3 A_3^l A_2 A_1^{(m+1)-l-2} b u(i-(m+1)+l+1, j-l-1) \\ + C_2 A_1^{(m+1)-1} b u(i-(m+1), j) .$$

上式は (4.15) 式において $m \rightarrow m+1$ としたものになっている。従って $m+1$ についても成立することがわかり, 一般の場合も成立することが示された。

(4) (5.14) 式の導出:

状態変数フィルタの漸近安定性 (F_1 の全ての固有値の絶対値が1未満) から

$$(A.9) \quad \| F_1^i \| \leq M_0 \lambda^i .$$

ただし

$$M_0 > 0, \quad 0 < \lambda < 1$$

となることに着目すると次式が得られる。

$$(A.10) \quad \| v_{11}(i, j) \| = F_1^i v_{11}(0, j) + \sum_{h=0}^{i-1} F_1^{i-h-1} g_1 u(h, j) \\ \leq M_0 \lambda^i \| v_{11}(0, j) \| + \sum_{h=0}^{i-1} \lambda^{i-h-1} M_0 \| g_1 \| \| u(h, j) \| \\ \leq M_0 \| v_{11}(0, j) \| + \left(\sum_{h=0}^{i-1} \lambda^{i-h-1} \right) M_0 \| g_1 \| \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-1,j)} | u(h, k) |$$

$$\leq N_1 + N_2 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-1,j)} |u(h,k)| \quad (0 \leq N_1 < \infty, 0 < N_2 < \infty).$$

同様にして次式も得られる。

$$(A.11) \quad \|v_{12}(i,j)\| \leq N_3 + N_4 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-1,j)} |y_r(h,k)|$$

$$(A.12) \quad \|v_{21k}(i,j)\| \leq N_5 + N_6 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i,j-1)} |v_{11}^k(h,k)|$$

$$(A.13) \quad \|v_{22k}(i,j)\| \leq N_7 + N_8 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i,j-1)} |v_{12}^k(h,k)|$$

$$(A.14) \quad \|v_{23}(i,j)\| \leq N_9 + N_{10} \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i,j-1)} |y(h,k)|$$

$$(0 \leq N_3, N_5, N_7, N_9 < \infty, 0 < N_4, N_6, N_8, N_{10} < \infty).$$

一方, 仮定 (ii) と (2.1), (2.2) 式より

$$(A.15) \quad |y_r(i,j)| \leq N_{11} + N_{12} \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-1,j)} |u(h,k)| \quad (0 \leq N_{11} < \infty, 0 < N_{12} < \infty)$$

となることに着目すると

$$(A.16) \quad \|v_{12}(i,j)\| \leq N'_3 + N'_4 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-2,j)} |u(h,k)| \quad (0 \leq N'_3 < \infty, 0 < N'_4 < \infty)$$

が得られ, さらに (A.10), (A.16) を (A.12), (A.13) に代入する。

$$(A.17) \quad \|v_{21k}(i,j)\| \leq N'_5 + N'_6 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-1,j-1)} |u(h,k)|$$

$$(A.18) \quad \|v_{22k}(i,j)\| \leq N'_7 + N'_8 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i-2,j-1)} |u(h,k)|$$

$$(0 \leq N'_5, N'_7 < \infty, 0 < N'_6, N'_8 < \infty).$$

以上より

$$(A.19) \quad \|\zeta_v(i,j)\| \leq M_1 + M_2 \max_{\substack{(0,0) \leq (h,k) \leq (i+l-1,j-l) \\ 0 \leq l \leq m \\ (0,0) \leq (h',k') \leq (i+m,j-m-1) \\ 0 \leq l' \leq m-1}} \|[u(h,k), y(h',k'), u(i+l',j-l')]\|^T$$

$$(0 \leq M_1 < \infty, 0 < M_2 < \infty)$$

となり, 仮定 (i) を使って

$$(A.20) \quad \|\zeta_v(i,j)\| \leq M_3 + M_4 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i+m,j)} |y(h,k)| \quad (0 \leq M_3 < \infty, 0 < M_4 < \infty)$$

が求められる。最後に $y_M(i,j)$ が一様有界であることに着目すると,

$$(A.21) \quad \|\zeta_v(i,j)\| \leq M_3 + M_4 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i+m,j)} \{|y(h,k) - y_M(h,k)| + |y_M(h,k)|\}$$

$$\leq N_1 + N_2 \max_{(0,0) \leq (h,k) \leq (i+m,j)} |e(h,k)| \quad (0 \leq N_1 < \infty, 0 < N_2 < \infty)$$

となり (5.14) 式が得られる。

Adaptive Control for Two-Dimensional Systems

Yoshihiko Miyasato

(The Institute of Statistical Mathematics)

This paper deals with the problem of constructing model-reference adaptive control (MRAC) for unknown Attasi-type two-dimensional (2D) systems. A new design method so as to regulate the output error between the unknown 2D system and the prescribed reference model to zero asymptotically, is considered.

The contents of this paper are as follows. First, the problem is presented. Then, we explain some relations between 2D systems and distributed parameter models in digital image processing, and show the background of the problem presented in the preceding chapter. Before constructing adaptive control systems, we must define the notion of "relative degree" of 2D systems, and derive parametrized representation using its notion. The notion of "relative degree" is a natural extension of that of usual 1D systems and gives explicit input-output relation of the systems. The parametrized representation for 2D systems is obtained using 2D state observers and the notion of "relative degree". This representation divides the controlled system into two parts, that is, the parameter vector which is unknown, and the state variable vector which is measurable. The 2D system to be controlled is described as an inner product of those two vectors. Details about 2D parametrized representation are summarized as Theorem 1. Next, adaptive control systems are constructed based on the parametrized representations, relative degree, and the sequence of computation. The two different adaptive control systems are shown in Theorems 2 and 3. In Theorem 2, we consider the case where the sequence of computation is determined in consideration of vertical coordinate. In this case, the control input at (i, j) on 2D domain is synthesized to determine the desired output at $(i+m, j)$, where m is the relative degree of the 2D system, and the control parameters are determined recursively from old parameters at $(i-m, j)$. Under several assumptions, uniform boundedness of all signals in the adaptive loop and convergence of the output error to zero are shown in Theorem 2. In Theorem 3, the case where the sequence of computation is determined in consideration of horizontal coordinate is treated. In this case, the control input at (i, j) is determined from the desired output at $(i+1, j+m-1)$, and the control parameters at (i, j) are updated in the same way. Finally, some simulation studies where the relative degrees are 1 and 2 are presented. Though the convergence property of the output error is not necessarily satisfactory, the output error is finally shown to converge to zero. The rate of convergence is thought to be improved by proper selection of design parameters, such as $a(i, j)$, (F_1, g_1) and (F_2, g_2) , or by using new adaptive laws, but that problem is left for our future research.