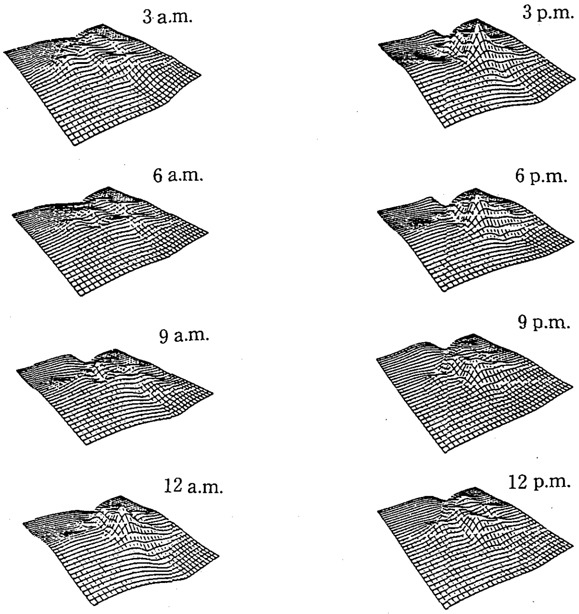
3.　地点特性の視覚化

地点特性の空間的な動きを理解するために，地点特性の曲面を構成する．方法としては，地点特性の推定値を補間条件として，エネルギ汎関数

$$\int_{\Omega}[\Delta u(x,y)]^2dxdy+\lambda\int_{\Omega}[\nabla u(x,y)]^2dxdy+k\int_{\partial\Omega}[u(x,y)]^2dxdy$$

を最小にする $u(x,y)$ を求めるという，ある種の補間法を採用する．



予測制御研究系

Centered Newton Method

田　辺　國　士

連立非線形方程式

$$\begin{aligned} g_1(z)&=0,\\ g_2(z)&=0,\\ &\vdots\\ g_n(z)&=0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

の解法を考える．ただし，$z\in R^n$ とする．g_i を第 i 要素とする列ベクトルを $g(z)$ とし，その Jacobi 行列を $J(z)$ とする．このとき Newton-Raphson 法は

$$z^{\dagger}=z+nr,\qquad J(z)nr=-g(z), \tag{1.2}$$

と書ける．ベクトル nr と独立なベクトル cd を

(1.3) $$J(z)cd=-g(z)+\Big(\sum_i |g_i(z)|/s^t(z)s(z)\Big)s(z)$$

で定義する．ただし，$s(z)$ は

$$s_i(z)=\begin{cases}1, & (g_i(z)>0)\\ 0, & (g_i(z)=0)\\ -1, & (g_i(z)<0)\end{cases}$$

を第 i 要素とする列ベクトルとする．このとき 'Centering direction' cd は Center Variety,

(1.4) $$C=\{z:|g_1(z)|=|g_2(z)|=\cdots=|g_n(z)|\}$$

に向かうベクトルとなる．

(1.5) $$\rho(z)=(\sum_i |g_i(z)|/n)/(\prod_i |g_i(z)|)^{1/n},$$

と定義すると，次式が成り立つ．

$$(\nabla\rho(z),\ cd(z))\leqq 0, \qquad (\nabla\,\|g(z)\|_1,\ cd(z))=0,$$
$$(\nabla\rho(z),\ nd(z))=0, \qquad (\nabla\,\|g(z)\|_1,\ nd(z))\leqq 0.$$

cd は $\rho(z)$ を減少させる方向ベクトルであり 'Newton direction', nd は 'guiding cone',

$$\mathrm{Cone}\,(g,\ c)=\Big\{z\in R^n:\Big(\sum_{i=1}^n |g_i(z)|\Big)^n\leqq c\prod_{i=1}^n |g_i(z)|\Big\}$$

の境界に接し，$\sum_i |g_i(z)|$ を減少させる方向ベクトルである．

これらを用いると，次の反復解法ができる．

Centered Newton 法：

$$z^{+}=z+\alpha\ nd+\beta\ cd,$$

ステップ幅 $\alpha, \beta>0$ は，条件

$$0<\alpha\leqq 1,$$
$$z+\alpha\ nd(z)+\beta\ cd(z)\in\mathrm{Cone}\,(g,\ c),$$
$$\|_1 g(z+\alpha\ nd(z)+\beta\ cd(z))\|_1<(1-\varepsilon)\|_1 g(z)\|_1,$$

の下で α を（近似的に）最大にするように β を決める．

ステップ幅を merit function

$$\mu(\delta,\ z)=\Big(\sum_i |g_i(z)|\Big)^{n+\delta}\Big/\Big(\prod_i |g_i(z)|\Big), \qquad (\delta>0),$$

を近似的に最小化するように決めてもよい．

$J(z)$ が特異になる場合には (1.2), (1.3) で決まる nd と cd の代わりに

$$(J^t(z)J(z)+\lambda I)nd^*(z)=-J^t(z)g(z),$$
$$(J^t(z)J(z)+\lambda I)cd^*(z)=-J^t(z)P(z)g(z),$$

で決まる nd^* と cd^* を用いる．ただし，

$$P(z)=I-s(z)(s(z))^t/s^t(z)s(z),$$

$\lambda>0$, とする．これを Modified Centered Newton 法と呼ぶ．