

## 模型粒子による振盪とパッキングの実験について

統計数理研究所 樋口伊佐夫

これは新しい研究成果の報告ではなく、幾何学的構造・パターンと統計の問題意識をもつ以前に私が行っていた研究の紹介である。すなわち私にとっての幾何学的統計へのアプローチの導入の記録である。

### 1. コロイド粒子の粒度分布と粒形の研究

実験を行うに到った背後には、そのまだ前がある。それは、昭和28年頃行っていた、コロイド粒子の粒度分布に関する、日立中央研究所の牟田明德氏との共同研究である<sup>(1)(2)</sup>。

わが国で原子炉用黒鉛の研究のはじまった頃で、特に品質についての研究が重要であった。

製品の品質には粒度分布が重要であるが、粒度分布はそれ自身が直接関与しているのではなく、間接的な影響をもつものと考えられる。従って、もっと影響の直接的なパッキングの様相のようなものをできれば知りたいわけである。パッキングは当時までは、同一球のものが主で、理論的にはオランダの Philips にいた Wise の四面体分布の理論というのがあったが<sup>(3)</sup>、まだ研究が進んでいなかった。それで取りあえず16種のボールベアリングで実際のものの分布になぞらえて混合してみるとということから実験をはじめたのである。

粒度分布の研究は遠心分離法による重量分布と、電子顕微鏡による数分布であるが、顕微鏡写真については形に関する検討もいくらか行ったので、ここに三三付記しておく。

写真の上の一つの粒子の平均半径  $\bar{r}$

$$\bar{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r d\theta$$

に対しどんな形も、同じ面積の円の半径より大きい半径をもち得ない。すなわち、面積  $s$  に対し  $s \geq \pi \bar{r}^2$  が成り立つから

$$\bar{r} / \sqrt{s/\pi}$$

が“丸さ”roundness の測度になり得るのではないかと考えた。幾何図形の場合これがどういう値になるかというところ

長方形の場合、辺の長さの比  $x \leq 1$

とし、

楕円の場合、軸比  $x \leq 1$

とすると、

$x$ の値	1.0	0.8	0.5	0.2
長方形のとき	.9945	.9908	.9599	.8341
楕円のとき	1.000	.9969	.9708	.8587

であるから鋭敏ではない。

射影面積と平均直径の回帰は

$$\log D = 0.518 \log S + 0.104$$

であり  $\log D$  と  $\log S$  の相関は、0.953 である。すべての粒子が円板なら  $S$  と  $D$  の関係は

$$\log D = 0.5 \log S + 0.121$$

となるべきである。もし  $S$  と  $D$  の分布が、2次元対数正規分布ならば、 $r=1/\sigma_0$  は楕円の方程式となるべきである。ここで  $\sigma_0^2$  は  $\sin \theta \log S + \cos \theta \log D$  の分散である。実測値はほぼ楕円であるが少し異なる。

そうすると対数正規について、どんな量をとっても大体対数正規になるのはなぜか？ 理論上は最大径と平均径がそうなることはあり得ない。それでは何が一番対数正規に近いか？ という疑問が残る。

カーボンブラックを粉砕する前と後では、粒度分布自体はあまりかわらない。いろいろの方向の径の規格化したもの  $D(\theta)/\sqrt{S}$ ,  $S$  は面積の  $\theta$  をかえていったときの相関関数  $f(\theta)$  を測定し、 $f(\theta)$  をフーリエ  $\cos$  展開することをこころみた。低い周波数の係数は粒子の形に関する影響、高い周波数のものは、ギザギザ度を示すはずである。写真では粉砕するとギザギザになるのがよくわかるか、それをこの方法で数値的に示すことは成功しなかった。

## 2. ランダムパッキングの実験<sup>(4)</sup>

粒子の位置の測定は非常にむづかしい。NSK のボールベアリング用の 1 inch-1/16 inch の 16 種を用い対数正規分布に似せて割合をきめ、混合し鉄製容器の中に入れボールとともに熱し、wax をとがして流し込み、徐々に冷却する。それをつぎつぎにボールを取り除きながら面をきり出す。各面を石膏で型どり、それについて測定を行った。

実際には二つの対数正規モデルで行い、調べた面は 6 個および 4 個である。空隙率は正確にはかることは困難であるが充填率は 0.643 と 0.570 であった。

これに対し、粒子が独立に互いにかさなりあえるとし、半径、位置の同時密度を

$$V^{-N} \prod_{i=1}^N f(\rho_i) d\vec{r}_i d\rho_i$$

としていろいろの量について計算値と実測値を比較した。

- (i) 底面に平行な面に存在する円の数
- (ii) 断面における被覆率
- (iii) 断面にあらわれる切断円の分布
- (iv) 球としての半径と断面円の半径との比
- (v) ランダムな線の切断部分との割合
- (vi) 切断面のラジアル分布

さらに数学的モデルと実際のパッキングとの不一致度を推定するために、どの程度ボールが重なりあうかの計算を行った。重なる部分の容積

$$I(\bigcup_{i \neq j} (C_i \cap C_j)) / V$$

これは数  $N \rightarrow \infty$  のとき  $(1-\theta)\{1-\exp(1-\theta)\}$  で充填率  $1-\theta$  とともに  $0 \sim 0.623$  まで変る。 $E(\sum_{j \neq i} (C_i \cap C_j))$  は近似的に  $(1-\theta)^2$  となる。さらに Volume のかわりに交差する粒子の数の期待値も計算できる。

## 3. 振盪による粒子の混合、分離、流動の実験<sup>(5)</sup>

ランダムパッキングを実際つくるのは大変むづかしい。大きい粒子は浮き上り、小さい粒子

は底におちるからである。そこで、その現象をなるべく条件をととのえてしらべるため、プラスチック粒子を用い、振盪機を特別に作って、振動数、振幅、振盪時間を変えて初期に入れた粒子の状態がどのように変わるかをしらべた。この際、振盪の効果を測定する測度として、Maxwell demon の勤勉度に対応する量を導入した。また時間を長くすると、大きな粒子は流れのおそい部分に押し出される傾向があることがわかった。

#### 4. ランダムパッキング内の圧力分布<sup>(6)</sup>

鉄パイプをランダムに重ね、二次元パッキングの圧力伝達をしらべようとした。Strain guage を用いる測定であるが、内部は成功しなかったが壁圧分布については、大略に知ることができた。

### 参 考 文 献

- (1) I. Higuti. A statistical research on colloidal graphite, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **VI**, 2.
- (2) A. Muta and I. Higuti (1955). Shape and size distribution of carbon black when it is crushed, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **VII**, 2.
- (3) E. Wase (1952). Dense random packing of unequal spheres, *Philips Res. Rep.* Vol. 7.
- (4) I. Higuti (1960). A statistical study of random packing of unequal spheres *Ann. Inst. Statist. Math.*, **XII**, 3.
- (5) I. Higuti (1964). Modelversuche über zufällige packungen verschiedener Kugeln und Mischungen von zweierlei Kugeln durch Rüttelung, *Proc. 14th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech.*
- (6) I. Higuti (1966). Bewegungen und Mischungen von zweierlei Kugeln durch Rüttelung, *Proc. 16th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech.*
- (7) 樋口伊佐夫 (1973). 幾何学的ランダムネスの統計的取扱い, 数理科学, 12-8.

### 細胞間接着力が関与する細胞パターン形成

鐘紡ガン研究所 本 多 久 夫・山 中 八 郎

組織表面の細胞の多角形パターンを調べているうちに、六角形パターンと矩形パターンの中間にあたるパターンを見つけた。このパターンは2つの要因（細胞境界が短縮しようとする要因と細胞同志の接着力の強弱からおこる要因）の釣り合いで形成されると考えられた。この事情を手がかりにして、細胞接着力の強弱に関する量的情報が得られた。<sup>(1)</sup>

多くの単層上皮組織ではその表面の細胞境界は図(a)のような六角形パターンに似たものを形

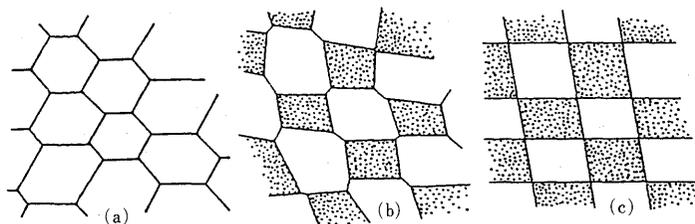


図 1.