組合せ論的数と整数型高精度計算

東海大学理学部　成　島　　弘・峯　崎　俊　哉

最近，成島によって展開されている鎖多項式の計算論を用いて，可換代数や多面体的複体の組合せ論的数と関連の深いブール束，立方体束，および分割束の鎖多項式の係数計算を整数型高精度で行った．その計算法と基本的定理は次の通りである：Narushima (1981).

Acyclic digraph D, 有理関数体 $Q(x)$, および Q の要素 a, b に対して，写像 $f^{(a,b)}$: $D\to Q(x)$ を次のように帰納的に定める：

$$f^{(a,b)}(t)=\begin{cases} a & t:\ \text{a sink} \\ (\sum_{t\to s} f^{(a,b)}(s))x+b & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この計算法は D の arc の個数に関して線形オーダーである．$\{f^{(a,b)} \mid a, b \text{ in } Q\}$ を $\mathscr{L}(D)$ で表わす．これは，通常の加法とスカラー積に関して，2 次元の線形空間 Q^2 に同型な Q 上の線形空間になる．その基底の 1 つは $\{f^{(1,0)}, f^{(0,1)}\}$ であり，$f^{(1,0)}(t)$, $f^{(0,1)}(t)$ の x^i の係数は，それぞれ D における t からシンクへの長さ i の道の個数，t からシンク以外の要素への長さ i の道の個数である．また，$f^{(1,1)}(t)$ の x^i の係数は D における t からの長さ i の道の個数である．

次に，$\mathscr{L}(D)$ の各 f に対して，$\tilde{f}=\sum_{t\in V(D)} f(t)$ を定義すると，$\tilde{f}^{(1,0)}$, $\tilde{f}^{(0,1)}$, $\tilde{f}^{(1,1)}$ の各多項式の x^i の係数は，それぞれ D におけるシンクへの長さ i の道の個数，シンク以外の要素への長さ i の道の個数，長さ i の道の個数である．

ここで，対象を poset に制限すると，次の事がわかる．

定理　P を connected poset とする．このとき，P の極小元を除くすべての要素 t に対して，$f^{(1,0)}(t)=(f^{(0,1)}(t))x$ となる必要十分条件は P が最小元をもつことである．

定理　P を最大元 $\mathbf{1}$ をもつ poset とする ($|P|\geqq 2$)．このとき，次が成り立つ．

$$\tilde{f}^{(a,b)}=((x+1)f^{(a,b)}(\mathbf{1})-b)/x$$

以上のことから，つぎの 3 つの具体的な束について整数型高精度計算を行った．

1) $P=B_n$ (n 次のブール束) の $f^{(1,1)}(\mathbf{1})$, $f^{(1,0)}(\mathbf{1})$

2) $P=C_n$ (n 次の立方体束) の $f^{(1,1)}(\mathbf{1})$, $f^{(1,0)}(\mathbf{1})$

3) $P=PL_n$ (n 次の分割束) の $f^{(1,1)}(\mathbf{1})$, $f^{(1,0)}(\mathbf{1})$

これらの計算は，当然，漸化式によって行われている．

参 考 文 献

1) Narushima, H. (1981). A class of recurrence relation on acyclic digraphs of poset type, *RIMS kokyuroku,* **427** (Applied Combinatorial Theory and Algorithms), 56-67.

2) Narushima, H. (1982). Principle of inclusion-exclusion on partially ordered sets, *Discrete Math.,* **42**, 243-250.

3) Minezaki, T. and Narushima, H. (1983). The number table of the coefficients of the command flow polynomial on a Boolean lattice, *Proc. Fac. Sci.* Tokai Univ., XVIII, 17-22.