描いたグラフを順位グラフという．

一つのアイテムに注目しそのアイテムベクトルを $\boldsymbol{x}$ と書くことにする．

$$\boldsymbol{x}=(u,\ v)$$

とすると，$(u,\ v)$ の分布に対して次の定理が成り立つ．

「**定理**」 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_k$ を多項分布

$$p(f_1,\ \cdots,\ f_k)=\frac{n!}{f_1!\cdots f_k!}\,p_1^{f_1}\cdots p_k^{f_k}$$

に従う確率変数とする．

$\theta_m=(m-1)\,\pi/(k-1)$ とし，

$$u=\frac{1}{n}\sum f_m\cos\theta_m,\quad v=\frac{1}{n}\sum f_m\sin\theta_m$$

と置くと $(u,\ v)$ の漸近分布は平均

$$\mu_1=\left(\sum c_m p_m,\ \sum s_m p_m\right)$$

分散共分散行列

$$\Sigma_1=\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\sum\sum c_r c_s\sigma_{rs} & \sum c_r s_s\sigma_{rs}\\ \sum\sum s_r c_s\sigma_{rs} & \sum c_r c_s\sigma_{rs}\end{bmatrix}$$

を持つ正規分布である．ここで

$$c_r=\cos\theta_r,\ s_r=\sin\theta_r$$
$$\sigma_{rs}=np_r\delta_{rs}-np_rp_s$$

である．

この定理を利用することにより

$$H_0:\ p_m=1/k\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

を仮定したときの等確率曲線を順位グラフ上に描くことができる．

## 多項式回帰における予測量の構成

川　合　伸　幸

回帰関数が次数 $K-1$ の多項式で表わされ，真の次数 (order) は，高々 $K-1$ であるという設定の下での予測関数の構成の問題を取り扱う．多項式回帰モデルは標準的な回帰モデル

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{y}}=\underset{n\times K}{X}\ \underset{K\times 1}{\boldsymbol{\beta}}+\underset{n\times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}},\ \boldsymbol{\varepsilon}\sim N\ (\mathbf{0},\ \sigma^2 I)$$

$$X=\begin{bmatrix}1 & x_1\cdots x_1^{K-1}\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 1 & x_n\quad x_n^{K-1}\end{bmatrix}$$

で表わされる．

さて，考察する予測のクラスを

$$(1)\qquad \left\{X\hat{b}_w \mid \hat{b}_w=\sum_{i=0}^{K}\phi_i\hat{b}(i)\,;\ \sum_{i=0}^{K}\phi_i=1,\ 0<\sum_{j=0}^{l}\phi_j\leqq 1,\ l=0,\ \cdots,\ K-1\right\}$$

とする．このクラスは $X'X=I$ のとき $\beta$ に事前分布 $N(\mathbf{0},\ \sigma^2W^{-1})$, $W=\mathrm{diag}\,(W_1,\ \cdots,\ W_k)$ を仮定して

形式的に得られるBayes推定量のクラスから抽出されたもので，次数 $k-1$ $(k=1, \cdots, K)$ としたときの最尤推定量 $\hat{b}(k)$ を含んでいる．さらに予測の良さを測る目的関数として，予測2乗誤差

$$E(X\hat{b}_W - X\beta)'(X\hat{b}_W - X\boldsymbol{\beta}) \tag{2}$$

を考える．そのとき，モデルの真の次数を $M$ とすると，クラス(1)の中で(2)を最小化する最適な重み $\phi_i^*$ $(i=0, \cdots, K)$ は,

$$\begin{cases} \phi_0^* = 1/(1+C_0-C_1) \\ \phi_k^* = 1/(1+C_k-C_{k+1}) - 1/(1+C_{k-1}-C_k) \\ \qquad (k=1, 2, \cdots, K-1) \\ \phi_K^* = 1-1/(1+C_{K-1}-C_K) \end{cases}$$

で与えられる．

ここに，$C_i=\beta' P_i (P_i' S^{-1} P_i)^{-1} P_i'\beta/\sigma^2$, $(i=0, \cdots, K)$, $S=X'X$, $P_i=[0 : I_{K-i}]$ である．特に $C_0 \geqq \cdots \geqq C_{M-1} > C_M = \cdots = C_K = 0$ より，$\phi_{M+1}^* = \cdots = \phi_K^* = 0$ である．

次にデータに基づく最適な重みの推定を考える．

同一のデザイン行列の上で $h$ 回の独立な観測値 $\{y_{ij};\ i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, h\}$ が得られている場合，データに基づく目的関数を,

$$h \| \sum_{j=0}^{K} \phi_j X \hat{\boldsymbol{b}}_{(j)} - \bar{\boldsymbol{y}} \|^2 + 2\tilde{\sigma}^2 \sum_j j\phi_j \tag{3}$$

とする．ここに $\tilde{\sigma}^2=(nh-n-2)^{-1} \sum_{i,j} (y_{ij}-\bar{y}_i)^2$ で繰り返しのない場合には $\tilde{\sigma}^2=(n-K-2)^{-1} \| \boldsymbol{y} - X\hat{b}_{(K)} \|^2$ であり，$\bar{\boldsymbol{y}}=(\bar{y}_i)'$, $\bar{y}_i = h^{-1} \sum_{j=1}^{h} y_{ij}$ である．このときクラス(1)の中で(3)を最小化する重み $\hat{\phi}_i^*$ $(i=0, 1, \cdots, K)$ は

$$\begin{cases} \hat{\phi}_0^* = \rho\ [1/(a_0'-a_1')] \\ \hat{\phi}_k^* = \rho\ [1/(a_k'-a_{k+1}')] - \rho\ [1/(a_{k-1}'-a_k')] \\ \qquad (k=1, 2, \cdots, K-1) \\ \hat{\phi}_K^* = 1-\rho\ [1/(a_{K-1}'-a_K')] \end{cases}$$

ここに，$a_k' = h \| \bar{\boldsymbol{y}} - X\hat{b}_{(k)} \|^2 / \tilde{\sigma}^2$ また,

$$\rho(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

である．

## 態度計量化の基礎的問題

水　野　欽　司

本年度は，"都市環境意識"および自然災害特別研究(科研費)の"学童防災教育"に関する研究に従事した．いずれも継続研究である．人の意識・態度の計量化は方法論的に困難な問題が多く，分析以前の測定方式の考察や得られた結果の有効性の吟味が常に重要になる．これらに関する基礎的な問題を中心に検討を行った．

### 1. 都市環境意識の分析

広域環境における住民の総合的な"住みやすさ感"は希薄かつ多義的であり，これの理解は容易でなく，この種の調査結果の都市施策的に有効な利用法も未だ判然としてない．既存の調査結果(快適性，利