形　と　統　計

筑波大学物理工学系　小　川　　泰

通常の統計は相加的な量を問題にしている．しかし，形（幾何学的構造・パターン）の統計では，その常識が大きく崩れ，いろいろな困難，新しい問題が現われる．たとえば，円周のような周期的な変域，球面のように閉じた二次元変域での，対称性の高い分布では，平均値の存在すら保証されない．もちろん，これらについての手法は確立しているが，形の絡む統計には，排除体積効果等，様々な困難がある．これらの困難の，統計問題のみを切りはなして問題にすることはできない．統計は，形の問題に対する有効な手段であると同時に，統計以外の形の問題の解決が，統計の問題点を明確にするからである．いずれにしても，形の問題は，定量化の困難あるいは不可能のゆえに，近代科学がやりのこしてきた難問である．

形研究も組織化され，研究会も度々開かれるようになった．統計数理研究所は，その中で，統計問題の中心の役割を果たして来た．今後もその役割を期待したい．1986年度にも続くこの共同研究計画としては，形の問題の中での統計，統計学の中での形の問題の，整理・位置づけを行ってゆく必要があるだろう．

金属森のフラクタル構造とクラスター統計

東北大通研　松　下　　貢・早　川　美　徳

§1. は じ め に

自然界に見られる様々なパターンの形成機構の解明を目指して近年，非平衡的な成長パターンのモデルが種々提案されるようになった[1]．特に「拡散に支配された凝集（diffusion-limited aggregation-DLA）」[2] は拡散場中でのパターン形成を記述する最も単純なモデルであり，そのパターンは大小様々の枝からなる複雑な分岐構造を持ち自己相似であることが知られている．[3,4] かくしてDLAは拡散場と等価なLaplace方程式を充す場の中でのパターン形成の全てに関連するために誘電破壊，金属葉，流体力学的viscous-fingering不安定現象など一見大きく異なる現象の本質を正しく記述する[1] こともあって，現在最も深く研究されている．

通常のDLAパターンは点から成長した分岐構造を持つので枝は個々のものとしては識別できない．他方，線状あるいは面状の下地（substrate）に成長させるDLAは「拡散に支配された付着(diffusion-limited deposition-DLD)」[5] と呼ばれる．この場合には図1に示された計算機シミュレーションの結果の例で見られるように，パターンは下地から成長する個々のクラスターあるいは樹(tree)からなる．この意味でDLDはパターンのフラクタル構造とクラスター統計との関連が議論できる興味深い例を提供する[6]．

筆者らは最近，古くから知られている2次元電析物の金属葉(metal-leaf)がDLAでよく説明できることを確めた[7]．これは点電極からの電析だが，線電極への変更は容易でこの場合の装置の概略図と2次元電析物の写真の1例を図2, 3に示す[8]．図3に見られるようにパターンは個々の金属樹(metal-tree)からなり，図1のDLDパターンと酷似する．図3のような金属樹の集りを金属森(metal-forest)と呼ぼう．以下にこの金属森が実際にDLDの実現であり，そのフラクタル構造とクラスター統計が密接に関連していることを順を追って説明する．

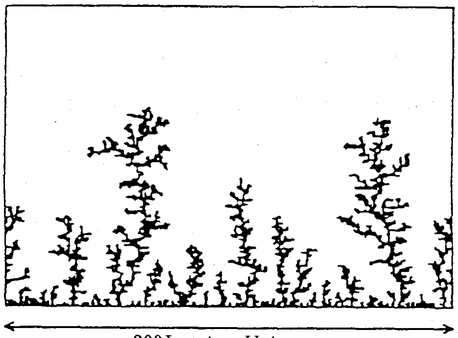

図 1.　線状の下地(下枠)の上に成長した 2 次元 DLD パターン．文献 5)より転載.

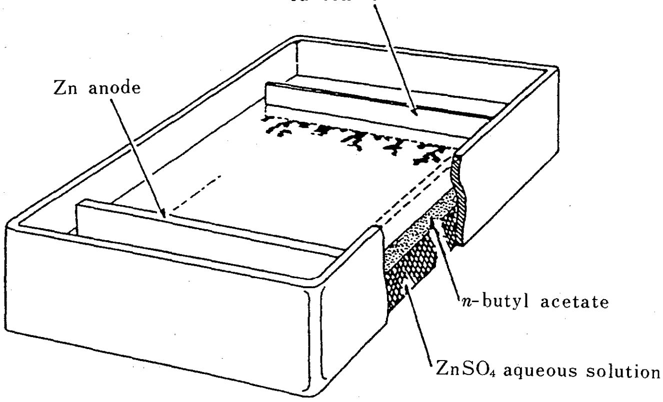

図 2.　金属森成長の実験装置の概略図

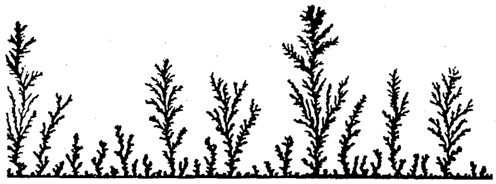

図 3.　線状電極から成長させた金属森の 1 例.

§ 2.　DLD

2.1　DLD パターンのフラクタル構造

DLD のフラクタル構造は Tokuyama ら[9] によって理論的に研究された．彼らは DLA の平均場理論を d 次元空間内に d_b 次元の下地がある時の DLD の問題に適用し，下地の単位長さ(面積)当りの DLD パターンの構成粒子数 N がその rms 厚さ(樹の集り即ち森の平均高さ) T によって

$$N \sim T^{d_f(d,d_b)} \tag{1}$$

とスケールされることを導いた．$d_f(d, d_b)$ はこのような DLD パターンの自己相似性を定量的

に特徴づけるフラクタル次元で

(2) $$d_f(d,\ d_b)=d_f(d)-d_b$$

と書かれる．ここで $d_f(d)$ は通常のDLAパターンのフラクタル次元で

(3) $$d_f(d)=\frac{d^2+1}{d+1}$$

と与えられる[9-11]．図2, 3に示された金属森の実験では $d=2$, $d_b=1$ であってそのフラクタル次元は式(2), (3)より $d_f(2,\ 1)=2/3$ が期待される．

2.2 DLDクラスターのサイズ分布

次に図1のように下地の上に成長した個々のクラスター(樹)のサイズ分布を議論しよう．即ちそのクラスター統計がクラスターのフラクタル構造とどのように関係するかを問題にする．下地の単位長さ(面積)当りの付着粒子が N の時，そこに s 個の粒子からなるクラスター(s-tree)を見出す確率を $n_s(N)$ と記す．Rácz ら[6]は線状の下地の上への2次元DLDの計算機シミュレーションの結果を基に，平衡系でお馴染みのpercolation問題でよく知られたクラスター統計の類推から，DLDクラスターのサイズ分布関数 $n_s(N)$ に関して次のような2指数スケーリング形

(4) $$n_s(N)\sim s^{-\tau}f(s^{\sigma}/N)$$

を仮定し，スケーリング則及び不等式

(5) $$\sigma=2-\tau,\quad \tau<2$$

を導いた．ここで $f(x)$ はcut-off関数で $f(x)\approx 1(x\ll 1)$, $f(x)\ll 1(x\gg 1)$ を充す．平衡系では(5)にあるのと全く逆の不等式が導かれるので，$\tau<2$ は非平衡系の特徴を表すものと見なせよう．(4)は有限サイズの効果が無視できれば($s^{\sigma}\ll N$)，サイズ分布関数が $n_s\sim s^{-\tau}$ とスケールされることを意味する．

DLDパターンのrms厚さ(森の平均高さ) T は，下地の単位長さ(面積)当りに付着するクラスター群に含まれる i 番目の粒子の下地からの距離を x_i として

(6) $$T^2\equiv N^{-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2=N^{-1}\sum_{s}sT_s^2n_s(N)$$

と表される．ここで T_s は s-treeの平均的なrms高さである．T_s に関してベキ乗形 $T_s\sim s^{\theta}$ を仮定しよう．これは後で正当化される．これと式(1), (4)を(6)に代入して(5)を使うと指数 τ は

(7) $$\tau=2-\theta d_f(d,\ d_b)$$

となる．ところでDLAとDLDの成長のメカニズムは全く同じであって，違いはDLAは点からの成長($d_b=0$)であるのに対してDLDは線状あるいは面状の下地からの成長($1\leqq d_b\leqq d-1$)という点だけである．従ってDLDでの大きな樹では下地の影響は小さくその枝ぶりは通常のDLAの大きな枝の構造と酷似する．即ちそのフラクタル構造は同じである．これは筆者らの金属樹の実験でも確認した．従って $s\sim T_s^{d_f(d)}$ となる．$d_f(d)$ は通常のDLAクラスターのフラクタル次元で(3)式で与えられる．これより(7)に含まれる指数 θ は $\theta=d_f(d)^{-1}$ となる．かくしてDLDクラスターのサイズ分布関数 $n_s(N)$ を特徴づける重要な指数 τ はこの θ と(2)を(7)に代入して

(8) $$\tau(d,\ d_b)=1+\frac{d_b}{d_f(d)}$$

と与えられる[6,8]．式(3)から $d_f(d)>d-1$ であり，$d_b\leq d-1$ だから上式から $\tau(d,\ d_b)<2$ が導かれ，(5)の不等式が確かに充されている．

§3 金属森の実験

3.1 金属森のフラクタル構造

それでは前記した金属森の実験は以上の理論的考察と consistent であろうか．図1と3の比較からこの金属森は $d=2$, $d_b=1$ の DLD の実例になりそうである．先ず，DLA, DLD クラスターの成長過程の特徴である遮蔽効果（screening effect；これによりフラクタル構造が出現）がこの金属森でも図4に見られるように明白に確認できる．そこでそのフラクタル構造の定量的分析に移ろう．図3のような金属森の写真を TV カメラを通して計算機の画像データメモリに記録する．これは 512×512 ピクセル（画素）からなっており，金属森パターンの一部がその上にあればそこでの密度 ρ を 1, なければ 0 と画像をディジタル化する．常に線状電極の一定長さ当りの森の成長を記録し，そこに成長した森のパターンを構成する $\rho=1$ のピクセル数 N と定義式(6)で与えられる rms 高さ T を求める．このようにして金属森の成長を追って求めた N と T の変化を両対数プロットした1例が図5に示されている．このように N と T が直線にきれいに乗るということは両者が(1)式のようにスケールされ，この例での金属森のフラクタル次元が $d_f(2,1)\cong 0.72$ で与えられることを意味している．独立に 10 回試した結果の平均で筆者らは

(9) $$d_f(2,\ 1)=0.70\pm 0.06$$

を得た．これは式(2),(3)から得られる理論値 2/3 と非常によく一致する．以上により金属森が

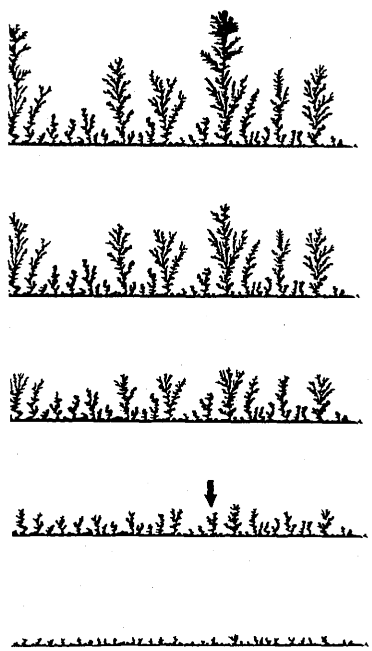

図4． 金属森の成長．例えば矢印で示された金属樹は周囲が充分開いているにもかかわらずその後成長が停止している．このような遮蔽効果の例は他にいくつも見られる．

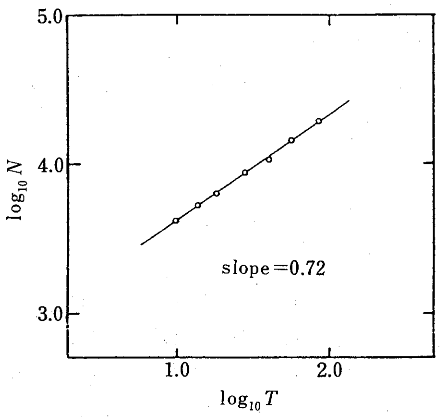

図5. 図4に示されたような金属森の成長過程を追ったNとTとの関係.

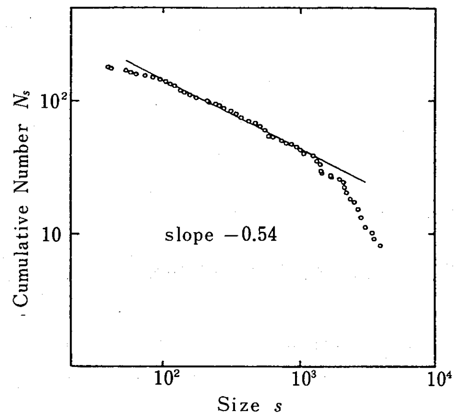

図6. 金属樹のサイズsとその累積個数N_sとの関係.

DLDの具体的実現であることはほぼ間違いない.

3.2. 金属樹のサイズ分布

次に金属森の中のsヶのピクセルからなる金属樹の数密度n_sを調べよう. データのバラツキが結構大きいのでここでは数密度そのものではなく, sピクセル以上からなる金属樹の総数, 即ち累積個数N_sを求める. ほぼ同じ高さに成長した6例の金属森について平均して求めたN_sのs依存性を両対数プロットしたものが図6に示されている. サイズsの小さい部分は小さな金属樹を数える際のアイマイさが入って不正確となり, sの大きい部分では有限サイズの効果でN_sが急激に小さくなるが, その中間領域でN_sはsに関してほぼベキ乗的に変化しその傾きは図から-0.54である. 従って金属樹の数密度$n_s \sim dN_s/ds$は

$$n_s \sim s^{-\tau}\,; \quad \tau = 1.54 \tag{10}$$

と求められる. これは$d=2$, $d_b=1$として式(8)から得られる理論値1.60に非常に近いばかりでなく, 最近のMeakin[12]による大規模な計算機シミュレーションの結果1.55と非常によく一致する. このように金属樹のサイズ分布はそのフラクタル構造と密接に関連していることがわかり, 金属森はDLDの実例であると断定できる.

§4. まとめ

以上により金属森の実験は線状の下地($d_b=1$)上での2次元DLDの非常に良い実例を提供したと言える. これは単にDLDクラスターのフラクタル構造及びそのサイズ分布関数のスケール則を初めて実験的に確認したに留まらず, 非平衡系でのクラスターのフラクタル構造とサイズ分布との相互関係を実験的に考察する道を拓いたものと言える. こういった観点からの研究材料は他にも未だ数多く残されているのではなかろうか. DLDに限定しても例えば硅化園と呼ばれる化学反応の沈殿物が作るクラスター群は$d=3$, $d_b=2$の場合に相当すると思われる. 又, 自然界に見られる例では頁岩などの節理面にMnO_2などが成長したしのぶ石 (dendrite) は$d=2$, $d_b=1$のDLDの実現かも知れない.

参 考 文 献

1) 松下 貢 (1985). 数理科学, **267**, 45.
2) T.A. Witten and L.M. Sander (1981). *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400.
3) T.A. Witten and L.M. Sander (1983). *Phys. Rev.* B**27**, 5686.
4) P. Meakin (1983). *Phys. Rev.*, A**27**, 604, 1495.
5) P. Meakin (1983). *Phys. Rev.*, A**27**, 2616.
6) Z. Rácz and T. Vicsek (1983). *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 2382.
7) M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo and Y. Sawada (1984). *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 286 ; 松下 貢, 早川美徳, 沢田康次 (1984). 固体物理, **19**, 789.
8) M. Matsushita, Y. Hayakawa and Y. Sawada (1985). *Phys. Rev.*, A**32**, 3814.
9) M. Tokuyama and K. Kawasaki (1984). *Phys. Lett.*, **100A**, 337.
10) M. Muthukumar (1983). *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 839.
11) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita (1986). *J. Phys. Soc. Jpn.*, **55**, No. 3.
12) P. Meakin (1984). *Phys. Rev.*, B**30**, 4207.

乱流と渦分布の統計処理

東京農工大学 高 木 隆 司

不規則さを含む流れ，すなわち乱流を記述するために，渦の分布によって流れの場を表わすことがしばしば行われる．渦とは，流速の分布を $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ とすると，渦度 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}$ が空間的に局在しているような流れを指す．流れの支配方程式から，個々の渦の強さが保存されることが導びかれるので(ヘルムホルツの渦定理)，乱流は一定の強さをもつ渦の集団の乱雑な配置と見なすことができる．本報告は，乱流のうちでも特に2次元的な乱流を点状の渦の集合で表わして，その時間発展を計算した最近の研究についての中間報告である．なお，乱流全般に関する解説として文献 (1) を挙げておく．

強さ k_i, 位置$(x_i(t), y_i(t))$を持つ N 個の渦点が2次元の無限空間内に分布しているとする．その後の各渦点の位置は

$$k_i\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial y_i},\ k_i\dot{y}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ H=-\frac{1}{4\pi}\sum_{i<j}k_ik_j\ln r_{ij},$$
$$r_{ij}^2=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2$$

で一意的に与えられる．渦点集合全体を特徴づける保存量として，渦の重心，分散，角運動量，エネルギー (H と関連している) が知られている (文献 (2))．また，点分布の乱雑さを表わすパラメターとして，配位温度 θ (文献 (4)) やオンザーガーによる温度 (文献 (4)) が提案されている．θ は次式で定義される．

$$\theta=\prod_{i<j}r^2/r_{ij}^2,\qquad r^2=\sum_{i,j}r_{ij}^2/N(N-1).$$

一方，オンザーガーの温度は，通常の温度と数学形式上類似しているが，その数値を評価するのは容易でないのでここでは考慮しない．ところで，乱れを特徴づけるパラメターとして，フラクタル次元もあるが，これは流体力学の研究上今まであまり考慮されてこなかった (例外は文献 (5))．連続な渦度分布では，エンストロフィーと呼ばれる量 Q

$$Q=\iint|\omega|^2dA$$