## 分配関数の対数の connected cluster 積分による展開について

広島大学総合科学部 間 瀬 茂

近年，統計数理研究所の尾形・種村両氏の一連の研究を初めとし，統計力学的モデル（特に canonical Gibbs 分布）の点配置データへの統計的応用が関心を集めている．Gibbs 分布を統計モデルとして採用する際の最大の問題点の一つは，その定義にあらわれる正規化定数（canonical 分配関数）$Z$ の極度の複雑さがもたらす理論的•数値解析的な困難である．この点は特に尾形•種村両氏による最尤法によるポテンシャル関数のパラメータ推定法に典型的にあらわれる．両氏はこの問題を物理学畑で提唱されている圧力の virial 展開に基く近似式や，多数のシミュレーションデータに基く独自の近似式で解決している．しかしながら分配関数の理論的・数値的性質については多くの問題が残されているように思われる．

今回の講演では以下の三点について考えてみた．

1） 分配関数の対数の connected cluster 積分と呼ばれる基本量による形式的展開．

2） それにあらわれる係数の主要項の決定．

3） Pogosian による cluster 関数の積分の漸近評価の理論と 1)，2) を結びつけることにより得られる分配関数の対数の第二次主要項までの漸近的評価．

残念ながら 1) の展開の複雑さにより，こうして得られた漸近的評価はあくまで形式的なものにとどまるが，それより推察される重要な点は分配関数の対数の第二次主要項が Gibbs 分布の定義領域の周長に比例することであり，いわゆる boundary 効果の存在が明確なことである．従来用いられて来た近似式が専ら第一次主要項の近似を目指したものであることを考えると，この結果は領域の形を近似式に反映させる必要を示唆するかもしれない．この点は統計的応用で典型的な，物理学的状況に比べはるかに小数の点データ数の場合特に問題となる可能性がある．なお，今一つのタイプの Gibbs 分布（grand canonical Gibbs 分布）の正規化定数（大分配関数）の対数については，Pogosian (1984, *Commun. Math. Phys.*, **95**) により厳密な漸近評価が得られていることを附記する．

## Golay 符号のランダムパッキングによる構成

統計数理研究所 伊 藤 栄 明

Golay 2 進符号より 24 次元空間における球の密な規則充塡がみちびかれる．符号語は 0 と 1 からなるベクトルと考えることができるのでこれを点ということにする．Golay 符号の各点から他の点への Hamming 距離は 8, 12, 16, 24 のいずれかであり，それぞれの距離に 759, 2576, 759, 1 の個数の点がある．他の点への Hamming 距離の分布が各点に共通であるということは Golay 符号が線型符号であるということからの帰結である．Golay 符号は通常有限体の理論をもちいて構成される．Golay の方法は有限体の理論をもちいない直観的な方法であるが理解しやすい方法ではない．ここでは Golay 符号をランダムに構成する方法についてのべる．

Hamming 距離によるランダムパッキングを考える．各座標が 0 と 1 からなる．次元 $d$ の点 $2^d$ 個があるとする．そのうちのひとつを先ずランダムにえらぶ．それを $I_1$ とする．$r(\geqq 1)$ 個の点がすでにえらばれたとすると $I_{r+1}$ は $I_1, I_2, \cdots\cdots, I_r$ のいずれからも $k$ 以上はなれている点のなかから等確率でえらばれるものとし，これを可能な限りつづける．このようにして得られる点の個数について計算機実験を行うと $d$ を固定した場合 $k$ が偶数であれば分散が大であり奇

```
DATA NO KOSU = 200
  1 ---   5    0  |
  6 ---  10    0  |
 11 ---  15    0  |
 16 ---  20    0  |
 21 ---  25    0  |
 26 ---  30    0  |
 31 ---  35    0  |
 36 ---  40    0  |
 41 ---  45    0  |
 46 ---  50    0  |
 51 ---  55    0  |
 56 ---  60    0  |
 61 ---  65    0  |
 66 ---  70    6  |******
 71 ---  75    2  |**
 76 ---  80    0  |
 81 ---  85    0  |
 86 ---  90    0  |
 91 ---  95    0  |
 96 --- 100    0  |
101 --- 105    0  |
106 --- 110    0  |
111 --- 115    0  |
116 --- 120    0  |
121 --- 125    0  |
126 --- 130    0  |
131 --- 135    0  |
136 --- 140    0  |
141 --- 145    0  |
146 --- 150    0  |
151 --- 155    0  |
156 --- 160    0  |
161 --- 165    0  |
166 --- 170    9  |*********
171 --- 175   31  |*******************************
176 --- 180   53  |*****************************************************
181 --- 185   36  |************************************
186 --- 190    8  |********
191 --- 195    1  |*
196 --- 200    0  |
201 --- 205    0  |
206 --- 210    0  |
211 --- 215    0  |
216 --- 220    0  |
221 --- 225    0  |
226 --- 230    0  |
231 --- 235    0  |
236 --- 240    0  |
241 --- 245    0  |
246 --- 250    0  |
251 --- 255    0  |
256 --- 260    0  |
261 --- 265    0  |
```

図 1.

数であれば分散が小である等の結果が得られる．各点から他の点への Hamming 距離は 8, 12, 16, 24 のいずれかであるという制約のもとで $d=24$ の場合，すなわち$2^{24}$個の点へのランダムパッキングを考える．計算機実験の結果 550 回中 11 回 $2^{12}=4096$ 個の Golay 2 進符号と同じ数の点が得られた．一般性を失うことなく最初の点を（0, 0, ……, 0）とすることができる．2 番目から 13 番目までの 12 行のすべての可能な 1 次結合を法 2 で考える．それらが 1 次独立であれば $2^{12}$ 個の点が得られる．この方法により Golay 符号を構成することができる．

3 進符号についても類似の結果が得られる．長さ 12 の符号を考え，相互の Hamming 距離が 6, 9 あるいは 12 であるという制約のもとでのランダムパッキングを考える．200 回の実験の結果を図 1．に示す．1 番目の点を 0 とし 2 番目から 7 番目の点を表す 6 個のベクトルのすべての可能な 1 次結合を法 3 で考える．それらが 1 次独立であれば $3^6=729$ 個の点が得られる．$3^6$ の各点から他の $3^6-1$ 個の点への Hamming 距離の分布は 3 が $8n$ 個，6 が $264-24n$ 個，9 が 440

$+24n$ 個，そして 12 が $24-8n$ 個となることが計算機シミュレーションよりわかる．図にあげたヒストグラムにおけるクラスターは $n$ の値に対応している．6個のベクトルが1次独立であった場合のみを考える．$n=0$ は 729 個の点が得られた場合(図に示した範囲外)，$n=1$ は 180 前後の個数の点が得られた場合，そして $n=3$ は 70 前後の個数の点が得られた場合に対応している．729 個の点が得られたのは 200 回中 52 回あり，その場合には Golay 3 進符号が構成されたことになる．

## 参考文献

Itoh, Y. (1986). Golay code and randon packing, *Ann. Inst. Statist. Math.*, Vol. **38**, No. 3.

# ランダムな Voronoi 分割とその最適化

東京工業大学 堀 素 夫

## 1. まえがき

前回のシンポジウムでは，ランダムな空間分割に関連した諸問題を，Voronoi-Delaunay 分割に対するある種の最適化問題としてとらえ，その一般的な定式化を行った．今回はとくに第1種の最適化問題について，その後に得られた結果を要約して述べる．

いま，$n$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の領域 $V$ の中に $N$ 個の点の配置 $\{\boldsymbol{x}_i, i=1, 2, \cdots\cdots, N\}$ を考えると，母点 $\boldsymbol{x}_i$ の Voronoi 領域 $V_i$ は，$V$ 内の任意の点 $\boldsymbol{x}$ と母点 $\boldsymbol{x}_i$ との距離 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|$ によって

$$V_i=\bigcap_{j\neq i}\{\boldsymbol{x}\in V \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j\|\}$$

として定義される．第1種の最適化問題においては，距離 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|$ の最大値または(なんらかの意味での）平均値を最小にするような母点の配置を定めることが目的となる．

## 2. 第1種のミニマックス型最適化問題

第1種のミニマックス型最適化問題とは，母点の位置 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ を変数として，各点 $\boldsymbol{x}\in V$ から最も近い母点までの距離の最大値を最小にする問題である．すなわち，便宜上距離の2乗をとって

$$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_N}{\text{minimize}}\ \max_i \max_{x\in V_i}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|^2$$

と表現される．

この問題の解（一般には local minimum）は，母点が Voronoi 領域の外心と一致するような配置であることが必要である．ただし，ここでは Voronoi 図形を含む最小の円を外接円，その中心を外心と定義した．普通の意味の外接円は単体（2次元では3角形）以外では必ずしも存在しないが，この意味の外接円は常に一意的に存在する．また，3角形の場合でも，鈍角3角形ではこれらの定義は一致しない．ある初期配置から出発して操作的に local minimum を求めるには，次のようにすればよい．母点の初期配置に対する Voronoi 分割を固定して，各母点をその