

確率過程量子化法*

統計数理研究所・早稲田大学 並 木 美 喜 雄

(1986年5月 受付)

1. 序——新しい量子化法を考える意義

量子力学について解説した教科書は多く、理系の大学生の多くが量子力学を学んでいる。先端技術の分野でも、量子力学はその理論的柱のひとつである。このような状況のもとでは「量子力学は、もうとっくの昔に完成してしまっており、手の加えようがないものである。」と錯覚しがちである。しかし、そうではない。量子力学が生れてから、今年でまだ、たったの60年。還暦というわけだが、古典力学や電磁気学に比べれば、学問としてはかなり若い。まだまだ、手を加えたり、作り直したりする余地はある。実際、量子力学の改造、発展に努力している科学者は世界中に数多くいる。

このような量子力学の改造、発展の努力のほとんどは、「量子力学を確率過程として定式化しよう。」という方向で行なわれているようである。その方向の努力には二つの側面がある：① 量子力学の基本的要請である「確率解釈」を例えば古典的確率過程から導出すること（原理的側面）、② 今までの量子化法の枠をこえる新しい計算技術の獲得（実用的側面）、というものである。¹⁾

従来、量子力学の確率過程的定式化は、もっぱら①の興味から行なわれてきた。中でも、ノイマンのNO-GO定理²⁾を突破するべく作られたボームの理論³⁾やネルソンの理論⁴⁾は有名である。ネルソンの理論は、量子揺動の根元をウィーナー型の古典的確率過程に求めて、量子力学の定式化に成功した。原理的観点から見て、確かに興味深いのが、波動関数に立戻ることのない量子化法として成立するか、多粒子系を矛盾なく扱えるかなど、基本的な疑問が多い。とくに従来の量子化法よりも適応範囲が狭くなるようでは困る。

この点、最近登場したパリジ・ウー流の「確率過程量子化法」⁵⁾は全く違った性格を持っている。この理論では、通常の時空変数の他に新しく「仮想時間」とそれについての確率過程を導入し、その過程の熱平衡極限（長時間極限）として量子力学を与える。現実の時間だけでなく、新しく増した変数についての確率過程として量子力学を定式化しようとする点が斬新である。

従来の量子化法には、教科書でおなじみの「正準量子化法」とファインマンによる「径路積分量子化法」とがあった。パリジ・ウー流の確率過程量子化法は、両者にはない興味深い特色や利点を持ち、第三の量子化法として注目されている。本稿では、この確率過程量子化法について述べる。

2. 径路積分量子化法

パリジ・ウー流の確率過程量子化法の話に入る前に、ファインマンの径路積分法について説明しておこう。

まず、簡単のため、質量 m を持つ一次元粒子がポテンシャル $V(q)$ の力の場の中で運動して

* 本稿は統計数理研究所に於ける講義に基づいている。

いる場合を考える。ファインマンの経路積分量子化法は、時刻 x_1 のとき点 q_1 にいた粒子が、時刻 x_2 のとき ($x_1 < x_2$) 点 q_2 で見出されることの確率振幅として、

$$(2.1) \quad \langle q_2, x_2 | q_1, x_1 \rangle = C \cdot \int D[q] \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx L \left(q(x), \frac{dq(x)}{dx} \right) \right]$$

を与えるものである*。ここで、 $L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dq(x)}{dx} \right)^2 - V(q)$ は、この系のラグランジュアン、その積分 $S = \int dx L$ は作用、 C は規格化定数、 $\int D[q]$ は $q = q(x)$ ($x_1 \leq x \leq x_2$, $q(x_1) = q_1$, $q(x_2) = q_2$) のすべての関数形 (つまり粒子の径路) についての積分を表わす。この量子化法は正準量子化法のシュレーディンガー方程式を通り越して、一気にその解である確率振幅を与えてしまう。(2.1) が経路積分量子化法の出発点である。

この量子化法の物理的意味を考えよう。古典論では粒子の動く径路、すなわち $q(x)$ の関数形は (初期及び終期値 $q(x_1) = q_1$, $q(x_2) = q_2$ が与えられれば) 一意に定まる。(この径路は変分原理 $\delta \int L dx = 0$ の解である。)しかし、量子論ではそれ以外の径路も実現する可能性がある。それぞれの径路が実現することの確率振幅を $\exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} L \left(q(x), \frac{dq(x)}{dx} \right) dx \right]$ に比例するとすれば、重ね合せの原理によって、前出の確率振幅は $\langle q_2, x_2 | q_1, x_1 \rangle = \sum_{\text{径路}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int L dx \right]$ で与えられる。これが (2.1) の内容である。図 2.1 を見ていただきたい。

(2.1) 式が与える確率振幅は、 $\Psi(x=x_1) = \delta(q-q_1)$ を初期条件とする、シュレーディンガー方程式の解 (すなわち波動関数) になっているはずである。

実際、(2.1) 式で与えられた波動関数 $\Psi(q_2, x_2) = \langle q_2, x_2 | q_1, x_1 \rangle$ がシュレーディンガー方程式を満足することは容易に証明できる。やってみよう。系を記述する作用は $S = \int_{x_1}^{x_2} L dx$ で与えられるから、 $\Psi(q_2, x_2) = C \cdot \int D[q] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$ 。これを時間 x_2 で偏微分すると、 $\frac{d}{dx_2}$ を全微分として次のようになる。

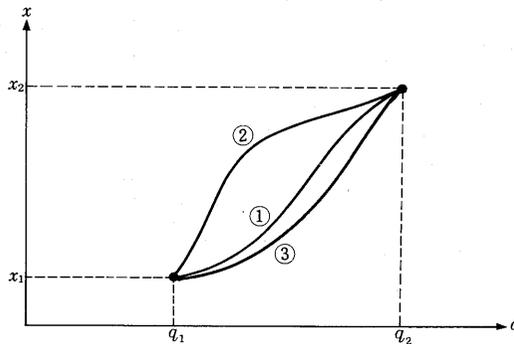


図 2.1 ファインマンの経路積分法:

① が古典論の径路 ($\frac{\delta S}{\delta q} = 0$)。量子論では ② や ③ の径路も実現可能。

* $|q, x\rangle$ は「時刻 x に粒子が点 q にいる」という状態を表わす状態ベクトル、 $\langle q, x|$ はその共役ベクトルを表わす。 $\langle q_2, x_2 | q_1, x_1 \rangle$ は、ベクトル $|q_1, x_1\rangle$ と $|q_2, x_2\rangle$ の内積である。確率振幅 $\langle q_2, x_2 | q_1, x_1 \rangle$ の絶対値自乗が遷移確率を表わす。

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(q, x_2) &= C \cdot \int D[q] \left[\frac{d}{dx_2} - \frac{\partial q(x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial q(x_2)} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right] \\ &= C \cdot \int D[q] \left[\frac{i}{\hbar} L - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial q(x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial S}{\partial q(x_2)} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]. \end{aligned}$$

ここで、古典論でよく知られているように、 $\frac{\partial S}{\partial q(x_2)}$ は、時刻 x_2 における粒子の運動量を表わす。したがって (2.2) は

$$(2.3) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(q_2, x_2) = C \cdot \int D[q] \left[\frac{\partial q(x_2)}{\partial x_2} p(x_2) - L \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$$

と書ける。つまり、 $[\dots]$ の中身を $p(x_2)$ と $q(x_2)$ のみで書き表せば、ハミルトニアン H となる。次に $p(x_2)$ を微分演算子 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q(x_2)}$ で置き換える。((2.2)式で見たように、 $\exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$ という因子の前では $p(x_2) = \frac{\partial S}{\partial x_2}$ を微分演算子 $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_2}$ で置きかえることができる。)すると、ハミルトニアン H の部分はハミルトン演算子 $\hat{H} = H \left(q_2, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_2} \right)$ となり、積分 $\int D[q]$ の外に出すことができる。結局、シュレーディンガー方程式

$$(2.4) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(q_2, x_2) = \hat{H} \Psi(q_2, x_2)$$

を得る。 q_2 は時刻 x_2 での粒子の位置座標である。

さて、(2.1)式において、 $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow +\infty$ とおけば、散乱行列 (S 行列) が得られる。この散乱行列も含めて、力学量期待値など物理にとって必要な量はすべて n 点関数

$$(2.5) \quad \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\hat{q}(x_1) \hat{q}(x_2) \dots \hat{q}(x_n)] | 0 \rangle$$

から求められる。 $\hat{q}(x)$ はハイゼンベルグ表示の力学量演算子、 $|0\rangle$ は最低エネルギー状態である。 $T[\dots]$ は時間順序積記号 ($[\dots]$ 中の演算子を x が大きいものから順に、左から右へ並べるという記号) である。(2.5)式は正準量子化法での n 点関数の表式であるが、径路積分法でも n 点関数の表式を作る必要がある。しかし、(2.1)の汎関数積分では $\exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} L dx \right]$ の指数部分が純虚数のため、収束に疑問がある。そのため、時間変数 x を $-ix$ に解析接続して議論することが多い。ここでもその方式を採用すれば、径路積分法は、2点関数に対して、公式

$$(2.6) \quad \Delta(x_1, x_2) = \frac{\int D[q] q(x_1) q(x_2) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]}{\int D[q] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]}$$

を与える。ただし、 S はユークリッド型作用で、

$$(2.7) \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + V(q) \right]$$

である。ポテンシャル $V(q)$ が時間変数 x に陽に依存しないとき、 Δ は $x_1 - x_2$ のみの関数となり、 $(\Delta(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2))$ と書けば $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$ に対する漸近式

$$(2.8) \quad \Delta(x_1 - x_2) \propto \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \Delta E |x_1 - x_2| \right]$$

から、第一励起状態と最低エネルギー状態（基底状態）のエネルギー差 $\Delta E = E_1 - E_0$ を知ることができる。場の理論では、 q は場の量 ϕ , x は 4 次元ユークリッド空間座標 (x, x_4) , ΔE は粒子の質量となる。

径路積分量子化法は通常の場合、正準量子化法と等価である。しかし、正準量子化法はハミルトニアンが定義できない系の量子化には使えない。これに対して、径路積分量子化法では、原理的にはラグランジュアンさえあればよい。また、正準量子化法が演算子を用いるのに対し、径路積分量子化法は c 数（ふつうの数）量子化である。

3. 確率過程量子化法の基本構成

この節から確率過程量子化法の話に入る。まず、「確率過程量子化法とは、どのような手順で量子化を行なうのか」という筋道を述べる。原理的な手順は非常に簡単である。

簡単のため、一粒子系の量子力学を考えよう。まず、通常の変数 x とする。ただし $x \rightarrow -ix$ という解析接続を行なっておく。次に、時間 x の他に新しい“時間変数” t を導入する。これを「仮想時間」と呼ぶ。力学変数 q は、 x のみの関数から、 x と t の関数へと拡張される。すなわち、

$$(3.1) \quad q(x) \longrightarrow q(x, t)$$

とする。この仮想時間は、今のところ単なる数学的道具にすぎず、物理的意味は全くわからない。4 次元時空以外の異次元空間からの揺動の効果を表わすという意見もあるが、推測の域を出ない。ただ、最近、仮想時間 t の物理的意味を示唆するかもしれない事実、著者は気づいた。§4 で詳述するつもりである。

さて、 $q(x, t)$ の t に対する「時間」発展として、次のようなランジュバン方程式によって記述される確率過程を導入しよう。

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = - \left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q=q(x, t)} + \eta(x, t).$$

ただし、 S は量子化したい物理系を記述する作用である。

$$\left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q=q(x, t)} \quad \text{は、} S \text{ のオイラー微分を行なった後で (3.1) のおきかえを実行したものである。}$$

以下、これを単に $\frac{\delta S}{\delta q}$ と書くことにする。また、 $\eta(x, t)$ はガウス型白色雑音であり、集団平均 $\langle \dots \rangle_\eta$ について次の性質を持つとする。

$$(3.3a) \quad \langle \eta(x, t) \rangle_\eta = 0,$$

$$(3.3b) \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle_\eta = 2\hbar \delta(x - x') \delta(t - t').$$

ここで \hbar はプランク定数であり、ちょうどこの確率過程の拡散定数に対応している。(3.3b) の $\delta(t - t')$ は、この確率過程がマルコフ過程であることを意味している。(3.2) と (3.3) が確率過程量子化の出発点である。古典的運動方程式は $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$ であるから、(3.2) と (3.3) は η に帰因する量子力学的揺動を加えたものと解釈することができる。

ランジュバン方程式 (3.2) と (3.3) は $t \rightarrow \infty$ で熱平衡分布 $\propto \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]$ を与える。それを見るには、ランジュバン方程式 (3.2) に対応する Fokker-Planck 方程式

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(q, t) = \hbar \int dx \cdot \frac{\delta}{\delta q(x)} \left(\frac{\delta}{\delta q(x)} + \frac{1}{\hbar} \frac{\delta S}{\delta q(x)} \right) P(q, t)$$

を解けばよい。\$P(q, t)\$は時刻 \$t\$ における \$q\$ の確率分布を表わす。(3.2)式の右辺第一項が減衰型のドリフト力を与える場合、右辺の \$P(q, t)\$ に作用している演算子の固有値は離散的のゼロを含む負の値をとり、\$t \to \infty\$ の極限で、\$P(q, t)\$ はゼロ固有値に属する固有関数に近づく。この固有関数は熱平衡分布 \$P_{eq}\$ を与えるが、\$\frac{\partial}{\partial t} P_{eq} = 0\$ であるから (3.4) の右辺をゼロにおいた方程式の解

$$P_{eq}(q) = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right] / \int D[q] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]$$

に他ならない。すなわち \$t \to \infty\$ では、\$q\$ の任意の関数 \$f(q)\$ の期待値は、この \$P_{eq}\$ を使って、\$\int f(q) P_{eq}(q) D[q]\$ と書ける。したがって、量子力学における \$n\$ 点関数は

$$(3.5) \quad \langle q^{\eta}(x_1, t_1) q^{\eta}(x_2, t_2) \cdots q^{\eta}(x_n, t_n) \rangle_{\eta} \xrightarrow{t_1=t_2=\cdots=t_n \rightarrow \infty} \frac{\int D[q] q(x_1) \cdots q(x_n) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]}{\int D[q] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S \right]}$$

によって与えられることになる。ただし、\$q^{\eta}(x, t)\$ はランジュバン方程式 (3.2) の解であり、\$\langle \cdots \rangle_{\eta}\$ は \$\eta\$ についての平均を表わす。右辺は径路積分量子化法が与える \$n\$ 点相関関数に他ならない。これが確率過程量子化法の手続である。この方法ではハミルトニアンはもちろん、ラグランジュアンすら必要とせず、運動方程式のみを基礎にして量子化を行なっていることに注意されたい。つまり、量子化の枠組としては、ラグランジュアンの存在が必要だった径路積分量子化法よりもさらに広い。この方法の場の理論への拡張は簡単である。上の議論で、\$q(x, t)\$ を場の変数 \$\phi(x, t)\$ に置き換えればよい。ただし、\$x\$ は一般に 4 次元ユークリッド空間の点を表わす。

§ 4. 簡単な例

簡単な例で確率過程量子化を実行してみよう。以下、しばらくは、プランク定数 \$\hbar=1\$、光速 \$c=1\$ とした自然単位系を用いることにする。また、以後 \$\langle \cdots \rangle_{\eta}\$ の添字 \$\eta\$ を省略する。

まず、スカラー自由場 \$\phi(x)\$ を考える。作用は

$$(4.1) \quad S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\sum_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \phi(x) \right)^2 + m^2 \phi^2(x) \right]$$

で表わされる。\$m\$ は粒子の質量である。対応するランジュバン方程式は (\$\square \equiv \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\$ とし
て)、

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = -(-\square + m^2)\phi(x, t) + \eta(x, t),$$

$$(4.3a) \quad \langle \eta(x, t) \rangle = 0,$$

$$(4.3b) \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2\delta(x-x')\delta(t-t')$$

となる。(4.2) は \$\phi\$ についての線形の微分方程式であるから簡単に解ける。§ 6 では、グリーン

関数を用いて解くことにするが、ここでは別のやり方でやってみよう。

x と t についてのフーリエ変換

$$(4.4) \quad \phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^5}} \int d^4k \, d\omega \, \tilde{\phi}(k, \omega) \exp [ikx - i\omega t]$$

を定義する。 $\tilde{\eta}(k, \omega)$ も同様に定義する。すると、(4.2), (4.3) はそれぞれ、

$$(4.5) \quad [-i\omega + (k^2 + m^2)] \tilde{\phi}(k, \omega) = \tilde{\eta}(k, \omega),$$

$$(4.6a) \quad \langle \tilde{\eta}(k, \omega) \rangle = 0,$$

$$(4.6b) \quad \langle \tilde{\eta}(k, \omega) \tilde{\eta}(k', \omega') \rangle = 2\delta(k+k')\delta(\omega+\omega')$$

となる。これらを用いると、相関関数 $\langle \phi(x, t)\phi(y, t') \rangle$ は、ただちに計算できる。 $t-t'$ を固定したまま $t \rightarrow \infty$ とした場合、

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \langle \phi(x, t)\phi(x', t') \rangle \\ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{t-t'=\text{fixed}} & \frac{2}{(2\pi)^5} \int d^4k \, d\omega \frac{\exp [ik(x-x') - i\omega(t-t')]}{\omega^2 + (k^2 + m^2)^2}, \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp [ik(x-x') - (k^2 + m^2)|t-t'|]}{k^2 + m^2} \end{aligned}$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ の定常状態では、 $\langle \phi(x, t)\phi(x', t') \rangle$ は常に $x-x'$, $t-t'$ という差だけの関数になる。

(4.7) で、 $t=t'$ とおき、仮想時間の依存性をなくすと、通常の場合の理論における2点関数

$$(4.8) \quad \Delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp [ik(x-x')]}{k^2 + m^2}$$

を得る。たしかに、通常の量子化法による結果が再現された。

さて、(4.8) は、 $|x-x'| \rightarrow \infty$ で

$$(4.9) \quad \Delta(x-x') \xrightarrow{|x-x'| \rightarrow \infty} \text{const} \cdot \exp [-m|x-x'|]$$

のようにふるまう。 §2 で述べたように、指数部分に粒子質量が現れるわけである。相互作用のある場合も、粒子質量が現れるという事情は同じであるが、それは作用の中の ϕ^2 の係数 m^2 ではなく、相互作用の効果を取り入れた一種の有効質量である。実際に観測にかかるのは、この質量である。ただし「くり込み」をしておかなければならない。

このように、 $\Delta(x-x')$ から粒子の質量が得られるわけだが、仮想時間 t についての相関関数からも粒子質量の情報が得られることが最近わかった⁶⁾。(4.7)式で $x=x'$ とおけば、

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \langle \phi(x, t)\phi(x, t') \rangle \\ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{|t-t'|=\text{fixed}} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp [-(k^2 + m^2)|t-t'|]}{k^2 + m^2}, \\ & = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{|t-t'|}^{\infty} d\xi \, \xi^{-2} \exp (-m^2\xi) \end{aligned}$$

となるが、右辺は $|t-t'| \rightarrow \infty$ で

$$(4.11) \quad \text{const} \cdot \exp [-m^2|t-t'|]$$

という漸近形をもつ。指数部分には、粒子質量の2乗が現れる。相互作用がある場合も同様である。あるいは、 $x=x'$ とおくかわりに、 x について積分した平均場

$$(4.12) \quad \Phi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^4x \phi(x, t),$$

V : 系の体積

を考えると、これに対しては有限の $|t-t'|$ に対しても、

$$(4.13) \quad \langle \Phi(t)\Phi(t') \rangle \xrightarrow[|t-t'| \rightarrow \infty]{|t-t'| = \text{fixed}} \frac{1}{m^2} \exp(-m^2 |t-t'|)$$

となることが示される。

なお、作用が

$$(4.14) \quad S = \int dx \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + U(q) \right]$$

で与えられる量子力学的ポテンシャルモデルの場合には、指数部には“ $m(\Delta E)^2$ ”が現れる。例えば、

$$(4.15) \quad U(q) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

という調和振動子の場合、

$$(4.16a) \quad \langle q(x, t)q(x, t') \rangle \xrightarrow{|t-t'| \rightarrow \infty} * \exp[-m\omega_0^2 |t-t'|],$$

$$(4.16b) \quad \langle Q(t)Q(t') \rangle = \frac{1}{m^2} \exp[-m\omega_0^2 |t-t'|],$$

$$(4.16c) \quad Q(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \int dx \cdot q(x, t)$$

を得る。調和振動子のエネルギー準位は $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_0$ であるから、 $\Delta E = \omega_0$ であり、確かに指数部には $m(\Delta E)^2$ が現われている。

今述べた事実を数値計算で確かめてみよう。具体例として、量子力学でよく知られたポテンシャル $U(q)$

$$(4.17) \quad U(q) = -U_0 / [\cosh(aq)]^2$$

による1次元粒子(質量 m)の非相対論的運動をとりあげる。このモデルに対するエネルギーレベルは正確にわかっていて、

$$(4.18) \quad \varepsilon_n = E_n / U_0 = -\zeta^{-1} [-(2n+1) + \sqrt{\zeta+1}]^2, \quad \zeta = 8mU_0/a^2, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

で与えられる。従って U_0 で測ったエネルギー差は、

$$(4.19) \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = 4\zeta^{-1}(\sqrt{\zeta+1}-2)$$

である。数値計算では q より Q の相関関数を用いた方がよい。というわけは、① 極限 $|t-t'| \rightarrow \infty$ をとらなくても指数関数的減少が起こり、それほど長距離の相関関数を計算する必要がないこと、② x での積分(平均)を行なうため、統計誤差が減少すること、などの理由による。ランジュバン方程式

$$(4.20) \quad \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = m \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) - 2aU_0 \sinh[aq(x, t)] / \cosh^3[aq(x, t)] + \eta(x, t),$$

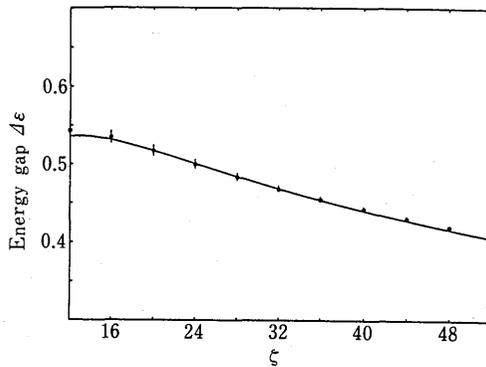


図 4.1 仮想時間方向からの $\Delta\varepsilon$ の導出: 数値計算の結果が理論曲線によく一致している。

を数値計算で解き、いろいろなどに対して $\Delta\varepsilon$ を計算した結果を図 4.1 にまとめる。理論曲線と非常によく一致していることがわかる。また、この計算法は仮想時間方向の相関関数を計算するため、通常の時空変数に対応する格子点の自由度をそれほど大きくしないでよいという利点がある。

§5. 任意の物理量に対するランジュバン方程式⁷⁾

場 ϕ や粒子の位置座標 q に対するランジュバン方程式のつくり方は、§3 で述べたとおりである。 ϕ や q がこのランジュバン方程式に従って時間発展するとき、その関数として与えられる物理量はどのように時間発展するのか? この問題を考えてみよう。

まず、話を簡単にするため、ゼロ次元ガウシアンモデルを考える。作用は

$$(5.1) \quad S = \frac{1}{2} q^2$$

で与えられる。対応するランジュバン方程式は

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt} q(t) = -q(t) + \eta(t)$$

である。これを Ito 型の確率微分方程式

$$(5.3) \quad dq(t) = -q(t)dt + dw(t)$$

に書き直す。ランジュバン方程式 (5.2) との対応でいえば、 $dw(t) = \eta(t)dt$ である。 $dw(t)$ に対する統計的性質は、

$$(5.4a) \quad \langle dw(t) \rangle = 0,$$

$$(5.4b) \quad \langle dw(t)dw(t) \rangle = 2dt$$

である。また、 $dw(t)$ と $q(t)$ とは互いに独立である。なお、(5.4b) より、 dw の大きさが

$$(5.5) \quad dw \sim \sqrt{dt}$$

程度である点に注意しよう。

$q^2(t)$ に対するランジュバン方程式を作ってみよう。それには、(5.5) に注意しつつ、 $q^2(t)$ の t に対する微分をつくってやればよい。やってみよう。

$$(5.6) \quad dq^2(t) = \frac{\partial q^2}{\partial q} dq(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^2}{\partial q \partial q} (dq(t))^2 + O(dt^{3/2}) \\ = -2q^2(t)dt + 2q(t)dw(t) + dw(t)dw(t) + O(dt^{3/2}).$$

ここで、確率微分方程式の計算でよく使われる公式

$$(5.7) \quad dw(t)dw(t) = 2dt$$

を用いると、 $O(dt^{3/2})$ の項を無視して、

$$(5.8) \quad dq^2(t) = -2q^2(t)dt + 2q(t)dw(t) + 2dt$$

を得る。これが $q^2(t)$ に対するランジュバン方程式である。なお、(5.7)式の等号は確率収束の意味で成立している。(5.7)の両辺の平均をとると、 $\langle q(t)dw(t) \rangle = \langle q(t) \rangle \langle dw(t) \rangle = 0$ より、

$$(5.9) \quad d\langle q^2(t) \rangle = -2\langle q^2(t) \rangle dt + 2dt$$

となる。これはただちに解けて、 $t \rightarrow \infty$ での $\langle q^2 \rangle$ は、

$$(5.10) \quad \langle q^2(t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1,$$

となる。たしかに $\int dq q^2 \exp(-S) / \int dq \exp(-S) = 1$ の結果と一致している。

一般に、作用 $S(q_i)$ ($i=1, 2, \dots$) で記述される力学系において、力学量 $f(q_i)$ に対するランジュバン方程式は、

$$(5.11) \quad df(q_i(t)) = \left[-\frac{\delta S}{\delta q_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_i} \right]_t dt + \frac{\partial f}{\partial \phi_i(t)} dw_i(t)$$

となる。証明は、(5.6)と同様な計算を行ない、(5.7)のかわりに、 $dw_i(t)dw_j(t) = 2\delta_{ij}dt$ を用いればよい。

スカラー自由場の2点関数もこの方法を用いて計算することができる。前節では x と t の両方についてのフーリエ変換を用いて議論したが、ここでは x のみのフーリエ変換を考える。すなわち、

$$(5.12) \quad \phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4}} \int d^4k \phi(k, t) \exp(ikx)$$

で定義される $\phi(k, t)$ を考える。ランダム変数 η についても同様である。 $\phi(k, t)$ に対するランジュバン方程式は、(4.2)式の両辺をフーリエ変換して、

$$(5.13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(k, t) = -(k^2 + m^2) \phi(k, t) + \eta(k, t),$$

$$(5.14a) \quad \langle \eta(k, t) \rangle = 0,$$

$$(5.14b) \quad \langle \eta(k, t) \eta(k', t') \rangle = 2\delta(k+k')\delta(t-t'),$$

となる。(5.2)式から(5.8)式を作ったのと同様にして $\phi(k, t)\phi(k', t)$ に対する方程式を作ると次のようになる。

$$(5.15) \quad d[\phi(k, t)\phi(k', t)] = -\{(k^2 + m^2) + (k'^2 + m^2)\} \phi(k, t)\phi(k', t)dt \\ + 2\delta(k+k')dt \\ + \phi(k, t)dw(k', t) + \phi(k', t)dw(k, t).$$

よって、

$$(5.16) \quad \begin{aligned} d\langle\phi(k, t)\phi(k', t)\rangle \\ = -\{(k^2+m^2)+(k'^2+m^2)\}\langle\phi(k, t)\phi(k', t)\rangle dt + 2\delta(k+k')dt. \end{aligned}$$

この方程式の解と、その $t \rightarrow \infty$ でのふるまいは、

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \langle\phi(k, t)\phi(k', t)\rangle = \text{const} \cdot \exp [-(k^2+m^2)t - (k'^2+m^2)t] \\ + \frac{1}{k^2+m^2} \delta(k+k') \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2+m^2} \delta(k+k') \end{aligned}$$

となる。右辺は、通学の場の量子論が与える2点関数のフーリエ表示に他ならない。同様な計算法は、ゲージ理論にも適用でき、物理的考察や数値計算に役立つ⁷⁾。

§6. 摂動論

この節では、確率過程量子化法に基づく摂動論について述べよう。ランジュバン方程式をグリーン関数を用いて解く方法について述べ、次にそれを使って摂動展開を行なう。

まず、スカラー自由場について考えよう。これは(4.1)式の作用で記述される系であった。 x についてのみフーリエ変換した表示でのランジュバン方程式は、(5.13)で与えられる。(5.13)式はただちに解けて、

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \phi(k, t) = \phi_0(k) \exp [-(k^2+m^2)(t-t_0)] \\ + \int_{t_0}^t G(k; t-t') \eta(k, t') dt' \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\phi_0(k) = \phi(k, t=t_0)$ は初期分布、

$$(6.2) \quad G(k; t-t') = \theta(t-t') \exp [-(k^2+m^2)(t-t')],$$

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \theta(t-t') &= 1(t > t'), \\ &= 0(t < t') \end{aligned}$$

はグリーン関数であり、方程式

$$(6.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (k^2+m^2) \right] G(k; t-t') = \delta(t-t')$$

を満足する。

(6.1)において、第一項は $t \rightarrow \infty$ でゼロになる。従って、 $t=t_0$ における初期分布は、量子論的期待値の計算には全く無関係である。(もっとも、後述のゲージ場の場合は事情は異なる。)そこで $t_0 = -\infty$ とおこう。この場合、(6.1)は定常解

$$(6.5) \quad \phi(k, t) = \int G(k; t-t') \eta(k, t') dt'$$

となる。積分区間は $-\infty$ から $+\infty$ である。(6.5)と(5.14)から、ただちに、

$$(6.6a) \quad \langle\phi(k, t)\phi(k', t')\rangle = D(k; t-t') \delta^4(k+k'),$$

$$(6.6b) \quad \begin{aligned} D(k; t-t') &= 2 \int dt'' G(k; t-t'') G(k; t'-t'') \\ &= (k^2+m^2)^{-1} \exp [-(k^2+m^2)|t-t'|] \end{aligned}$$

が得られる。当然のことながら、 $D(k; 0) = (k^2+m^2)^{-1}$ はスカラー自由場の2点関数 $\Delta(x_1, x_2)$ のフーリエ表示になっている。なお、みかけ上、 $t \rightarrow \infty$ という操作が入ってないように見えるが、これは $t_0 \rightarrow -\infty$ によって代行されている。以後、 G のことを「グリーン関数」と呼び、 D のこ

とを「プロパゲーター」と呼ぶ。(6.5)と(6.6)からわかるように、 D は2つの G を $\langle \eta \eta \rangle$ という平均操作によって結びつけたものである。覚えておいていただきたい。

次に相互作用のある系について摂動展開を行なおう。話を簡単にするために、いわゆる ϕ^3 -理論を考える。これは、次のような作用で記述されるものである。

$$(6.7) \quad S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{g}{3!} \phi^3 \right].$$

ここで m は粒子の質量、 g は結合定数である。(この S は $g\phi^3$ の項のため、正の値をとるとは限らない。このためファインマンの経路積分 $\int D[\phi] \exp[-S]$ は収束しない。ここでは g についての級数だけを扱う。摂動論の例示のためである。)この S に対応するランジュバン方程式をフーリエ表示で書けば、

$$(6.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(k, t) = -(k^2 + m^2)\phi(k, t) + \eta(k, t) - \frac{g}{2!} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \delta(k - k_1 - k_2) \cdot \phi(k_1, t) \phi(k_2, t)$$

となる。右辺の最後の項が相互作用を表わす項である。フーリエ表示で書いてあるため、たたみ込み積分の形をしている。(6.8)式の形式解(積分形)は、グリーン関数 G を用いて次の様に書ける。

$$(6.9) \quad \phi(k, t) = \int dt' G(k; t-t') \left[\eta(k, t') - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{g}{2!} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \delta^4(k - k_1 - k_2) \phi(k_1, t') \phi(k_2, t') \right].$$

(6.9)式を逐次代入法で解き、結合定数 g による展開式を作る。シンボリックな書き方をすれば、次のようになる。

$$(6.10) \quad \phi = \int G \eta - \frac{g}{2!} \int \int G(G\eta)(G\eta) + \left(\frac{g}{2!} \right)^2 \int \dots \int [G(G(G\eta)(G\eta))(G\eta) + G(G\eta)(G(G\eta)(G\eta))] + \dots$$

(6.10)は図で表わすと見やすくなる。今、

$$(6.11) \quad \begin{array}{l} \text{---} \iff G \\ \text{---} \times \iff G\eta \\ \text{---} \text{---} \iff -\frac{g}{2!} \end{array}$$

という対応で図を書くと、

$$(6.12) \quad \phi = \text{---} \times + \text{---} \text{---} \times + \text{---} \text{---} \text{---} \times + \dots$$

と表わされる。(例えば $\text{---} \text{---} \times$ は $\text{---} \text{---} \times$ と分解して考えると(6.11)との関係がわ

かるだろう。) (6.5)式で表わされる ϕ を n 個かけあわせ, (5.14)式と

$$(6.13) \quad \langle \eta(p_1, t_1) \eta(p_2, t_2) \cdots \eta(p_n, t_n) \rangle = \begin{cases} \sum_{\text{組み合わせ}(i, j) \text{の対}} \prod \langle \eta(p_i, t_i) \eta(p_j, t_j) \rangle & (n \text{ が偶数}), \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

を使って η に関する平均値を計算すると, n 点関数に対する摂動展開の表式が得られる. この計算にも, 図を使うと便利である. (6.13)より η に関する平均はすべて $\langle \eta \eta \rangle$ に帰着される. (6.6)についていえば, $\langle (G\eta)(G\eta) \rangle$ が D になる. このことを「 $\text{---}\times$ と $\times\text{---}$ の \times (バツ) が結びついて $\text{---}\times\text{---}$ になる。」と表わそう. すなわち, 図との対応は,

$$(6.14) \quad D \iff \text{---}\times\text{---}$$

である. すると, n 点関数(のフーリエ表示)は, ① (6.5)式の ϕ を n 個かけあわせ, ② すべての \times (バツ) をすべての可能な組み合わせで対にし, ③ (6.11)と (6.14)の対応に従って G と D で書き直し, ④ 必要な積分記号を書き加えてやれば得られる. 例えば, 2点関数の g^2 のオーダーの項は

$$(6.15) \quad \langle \phi(k, t) \phi(k', t) \rangle^{(2)}$$

$$\begin{aligned} &= \text{---}\begin{array}{c} \times \\ \text{---}\text{---} \\ \times \end{array}\text{---} + \begin{array}{c} \times \\ \text{---}\text{---} \\ \times \end{array}\text{---} + \text{---}\begin{array}{c} \times \\ \text{---}\text{---} \\ \times \end{array}\text{---} \\ &+ \text{---}\begin{array}{c} \times \\ \text{---}\text{---} \\ \times \end{array}\text{---} + \text{---}\begin{array}{c} \times \\ \text{---}\text{---} \\ \times \end{array}\text{---} , \\ &= \frac{1}{2} g^2 \delta(k+k') \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^2} \delta^4(k-k_1-k_2) I^{(2)}, \end{aligned}$$

$$(6.16) \quad \begin{aligned} I^{(2)} &= \int dt_1 \int dt_2 \\ &\times [G(k; t-t_1) D(k_1; t_1-t_2) D(k_2; t_1-t_2) G(k; t-t_2) \\ &+ D(k; t-t_1) G(k_1; t_2-t_1) D(k_2; t_2-t_1) G(k; t-t_2) \\ &+ D(k; t-t_1) D(k; t_2-t_1) G(k_2; t_2-t_1) G(k; t-t_2) \\ &+ G(k; t-t_1) G(k_1; t_1-t_2) D(k_2; t_1-t_2) D(k; t-t_2) \\ &+ G(k; t-t_1) D(k_1; t_1-t_2) G(k_2; t_1-t_2) D(k; t-t_2)] \end{aligned}$$

となる. あとは, $I^{(2)}$ 中の仮想時間についての積分を実行してやれば, 通常の場合の理論と同じ結果が得られる. この積分は直接行なうとやっかいだが, グリーン関数 G とプロパゲーター D の間に成立する関係式

$$(6.17) \quad G(k; t-t') = \theta(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} D(k; t-t'),$$

を用いると簡単に整理できる. ((6.17)の成立は, (6.2)と (6.6)から明らかであろう.) やってみよう.

$$(6.18) \quad \begin{aligned} I^{(2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \\ &\cdot \left[\theta(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} D(k; t-t_1) \right] D(k_1; t_2-t_1) \\ &\cdot D(k_2; t_2-t_1) \theta(t-t_2) \frac{\partial}{\partial t_1} D(k; t-t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D(k; t-t_1) \theta(t_2-t_1) \left[\frac{\partial}{\partial t_1} D(k_1; t_2-t_1) \right. \\
& \cdot D(k_2; t_2-t_1) \left. \right] \theta(t-t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} D(k; t-t_2) \\
& + \left[\theta(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} D(k; t-t_1) \right] \theta(t_1-t_2) \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t_2} D(k_1; t_1-t_2) D(k_2; t_1-t_2) \right] D(k; t-t_2).
\end{aligned}$$

この式は、部分積分の反復により、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
(6.19) \quad I^{(2)} & = 2 \int_{-\infty}^t dt_2 D(k; t-t_2) D(k_1; 0) D(k_2; 0) \frac{\partial}{\partial t_2} D(k; t-t_2) \\
& = [D(k; t-t_2) D(k_1; 0) D(k_2; 0) D(k; t-t_2)]_{-\infty}^t \\
& = D(k; 0) D(k; 0) D(k_2; 0) D(k; 0).
\end{aligned}$$

$D(k; 0)$ がスカラー自由場の 2 点関数であることを思い出せば、(6.19) 式が通常の量子論における結果と全く同じであることがわかる。同様な計算法は、 g の任意の次数の項についても行なうことができる。すなわち (6.17) 式を用いて摂動級数を D のみで表わし、簡単な部分積分の計算を行なうことにより、通常の場の理論と同じ結果が得られるのである。一般の場合、こうした計算は、確率過程量子化法に固有なある種の超対称性⁸⁾ を利用すれば簡単になる。ここでは立入らない。

§ 7. ゲージ場の古典論

何といっても、場の量子論の主役は現在のところ、ゲージ場である。例えば電磁場（あるいは光子といってもよい）や、グルーオンの場はゲージ場である。この節では、古典ゲージ場について簡単に復習し、次節でゲージ場の確率過程量子化について述べる。

まず、真空中の電磁場について簡単に復習しておこう。古典電磁場は、よく知られているように、マクスウェルの方程式によって記述される。このマクスウェルの方程式は、相対性理論が要求するローレンツ変換に対する共変性を満たす形に書き直すことができる。その結果は、ミンコフスキー空間での 4 次元 2 階反対称テンソル

$$(7.1) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu,$$

を用いて、

$$(7.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} = 0$$

となる。ここに、ギリシア文字 μ, ν 等は、4 次元座標の成分 1, 2, 3, 4 を表わすとする。すなわち、 $x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=it$ である。また「ひとつの項に 2 つ以上の同じ添字が現われたら、その文字についての和をとる」という規約を採用している。そして、 A_μ は

$$(7.3) \quad A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4 = i\phi)$$

で定義される 4 元ベクトルポテンシャルで、 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ が電磁気学で用いる 3 次元ベクトルポテンシャル、 ϕ がスカラーポテンシャルである。

$F_{\mu\nu}$ は 2 階の完全反対称テンソルであるから、その独立成分の数は 6 個であり、電場 $\mathbf{E} = (E_1,$

E_2, E_3) と磁場 $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ の各 3 成分を,

$$(7.4) \quad \begin{aligned} F_{4j} &= iE_j \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} H_k, \end{aligned}$$

の形で表わしている。 ε_{ijk} は 3 階の完全反対称テンソルである ($\varepsilon_{123}=1, \varepsilon_{213}=-1$, etc.). (7.4) を (7.1), (7.2) に代入すれば, 通常の (\mathbf{H} と \mathbf{E} で書かれた) マクスウェルの方程式が再現される。

量子論では, \mathbf{E} と \mathbf{H} (つまり $F_{\mu\nu}$) ではなく, A_μ を理論上, より基本的な量として取り扱う。 A_μ のことを可換ゲージ場という。可換ゲージ場に対する作用は, $F_{\mu\nu}$ が (7.1) で定義されているとして,

$$(7.5) \quad S = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

で表わされる。 (7.5) が与える運動方程式が, ちょうどマクスウェルの方程式 (7.2) になっている。この作用は, ゲージ変換

$$(7.6) \quad \begin{aligned} A_\mu &\longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Lambda(x), \\ \Lambda(x) &: x \text{ の任意のスカラー関数} \end{aligned}$$

に対して不変である。すなわち, A_μ を A'_μ に取りかえても, それによって記述される物理は全く同じである。 (7.6) の変換に対するこのような不変性のことを, 「ゲージ不変性」という。

ここで, (7.6) 式における $\Lambda(x)$ は任意であったから, ある A_μ に対して $\Lambda(x)$ を

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} \Lambda(x) = -\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu$$

を満すように選ぶと,

$$(7.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} A'_\mu = 0$$

を得る。 (7.7) のような, 一種の拘束条件を課すことを, 「ゲージ固定」と言う。これをフーリエ表示で再考しよう。

作用 (7.5) が与える運動方程式 $\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0$, すなわちマクスウェル方程式 (7.2) をフーリエ表示で書くと,

$$(7.8) \quad k^2 (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) A_\nu(k) = 0$$

となる。 $A_\nu(k)$ の定義は (5.12) の $\phi(k, t)$ と同様である。ここで (7.8) 式の左辺の $(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)$ という因子が物議のタネになる。

$$(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) k_\nu = k_\mu - k_\mu = 0$$

となることからわかるように, この因子は, 「横波成分 (k_μ に垂直な成分) のみを選びだし, 縦波成分 (k_μ に平行な成分) を除去する」射影演算子である。そのため, $(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)$ は逆演算子をもたず, 方程式 (7.8) は横波成分しか決めてくれない。縦波成分は不定のまま残る。ゲージ固定条件 (7.7) は, 縦波成分をゼロとおくことに等しい。

A_μ を縦波成分と横波成分に分けてみよう: $A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L$, ただし,

(7.9a) 横波: $A_\mu^T(k) = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) A_\nu(k),$

(7.9b) 縦波: $A_\mu^L(k) = (k_\mu k_\nu / k^2) A_\nu(k).$

$A_\mu^T(k), A_\mu^L(k)$ はそれぞれ $k_\mu A_\mu^T = 0$ (横波条件), $k_\mu A_\mu^L = k_\mu A_\mu$ (縦波条件) を満足している。また、作用 S を A_μ^T と A_μ^L で汎関数微分すると、

(7.10a)
$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^T} S = k^2 A_\mu^T$$

(7.10b)
$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^L} S = 0$$

となる。これから作用 S の中には、縦波成分は入っていないことがわかる。ゲージ変換 (7.6) のフーリエ変換は、

$$A_\mu(k) \longrightarrow A'_\mu(k) + k_\mu \Lambda(k)$$

であるから、これは縦波成分のみに関する変換である。このことからわかるように、 S の中に縦波成分が入っていないという事実は、作用積分 S のゲージ不変性の反映である。

最後に非可換ゲージ場について簡単に述べておこう。非可換ゲージ場の場合ベクトルポテンシャルは、時空 4 次元成分の他に内部自由度という別の自由度を持つ。例えば、 $SU(N)$ 非可換ゲージ場の場合は、 A_μ^a ($a=1, 2, \dots, N^2-1$) と表される。作用は、

(7.9)
$$S = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$$

であり、 $F_{\mu\nu}^a$ は

(7.10)
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

で定義される。ただし、 f^{abc} は $SU(N)$ 群のジェネレーターがつくる Lie 代数の構造定数である。この式の右辺の最後の項が存在するため、作用積分 S は可換ゲージ場の場合と違って A_μ^a について 3 次と 4 次の自己相互作用を持つ。

以上のような複雑さはあるが、ゲージ変換に関する議論は可換ゲージ場の場合と同様である。実際、(7.6) 式に対応するゲージ変換が定義でき、作用はその変換に対して不変になる。

§ 8. ゲージ場の確率過程量子化

それでは、ゲージ場の量子化の話に入ろう。ゲージ場の量子化という問題は、長い間、物理学者をさんざん悩ませた。特に問題だったのはゲージ固定をせずには量子化が不可能だという点であった。この事情は正準量子化法でも径路積分量子化法でも同じである。ゲージ固定をすれば、理論のゲージ不変性とユニタリー性をこわす。このため、特に非可換ゲージ場の場合には、「ファデェフ・ポポフ・ゴースト場」という奇妙なフェルミオン場（これは決して観測にはかからないはずのゴースト（お化け）場である。）の導入が不可欠となる。

では、確率過程量子化法の場合にはどうか。この量子化法の創始者であるパリジとウーは、すでに最初の論文で、① ゲージ固定をせずに量子化してランダウゲージ（後述）の 2 点関数を求め、② ゴースト場の導入なしで、それと同じ効果が得られるという推測を与えた。これらの主張は、もし本当なら確率過程量子化法の大きな利点と見なされるに違いない。これらの主張の検討を中心に、以下の話を進めていきたいと思う。

まず、可換ゲージ場 $A_\mu(x)$ の量子化を考える。径路積分量子化法では、物理量 $f(A)$ の真空

期待値は,

$$(8.1) \quad \langle f(A) \rangle = N \int f(A) \exp[-S(A)] D[A]$$

で与えられる. N は規格化定数である. ところが $\exp[-S(A)]$ という因子の中に縦波成分が入っていないために, 縦波成分に対する積分は発散してしまう. そこで, ゲージ固定をして縦波成分に対する積分を安定化する. 古典論での (7.7) 式に対応する量子論におけるゲージ固定は, 作用積分の中に $\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2$ という「ゲージ固定項」を付加することによって行なわれる. すなわち, α を正の定数として,

$$(8.2) \quad S[A] = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2$$

とすればよい. この S を用いれば, (8.1) は収束する. たとえば, 2点関数は

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \langle A_\mu(k) A_\nu(k') \rangle &= \delta^4(k+k') \Delta_{\mu\nu}(k), \\ \Delta_{\mu\nu}(k) &= k^{-2} (\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) k_\mu k_\nu / k^2) \end{aligned}$$

となる. α をゲージパラメータと呼び, $\alpha=0$ の場合をランダウゲージ, $\alpha=1$ の場合をファインマンゲージと呼ぶ. ゲージ変換に対して不変な (物理的に意味のある) 量の期待値は α によらない. このようにすれば, (8.1) の積分は可能になるが, ゲージ固定項の導入は, 同時にいろいろな問題を引き起こす. このことはすでに述べた通りである.

次に確率過程量子化法の場合を考えよう. ゲージ固定項を入れない作用 $S = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ の与えるランジュバン方程式は

$$(8.4) \quad \partial_t A_\mu(k, t) = -k^2 (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) A_\nu + \eta_\mu(k, t),$$

$$(8.5a) \quad \langle \eta_\mu(k, t) \rangle = 0,$$

$$(8.5b) \quad \langle \eta_\mu(k, t) \eta_\nu(k', t') \rangle = 2\delta_{\mu\nu} \delta^4(k+k') \delta(t-t')$$

となる. パリジとウーは

$$(8.6) \quad A_\mu(k, t=0) = 0$$

という初期条件を設定して (8.4) 式を解いた. その解は,

$$(8.7) \quad \begin{aligned} A_\mu(k, t) &= \int_0^\infty G_{\mu\nu}(k; t-t') \eta_\nu(k, t') dt', \\ G_{\mu\nu}(k; t-t') &= [(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) \exp[-k^2(t-t')] \\ &\quad - k_\mu k_\nu / k^2] \theta(t-t') \end{aligned}$$

である. 前述のように, (8.4) 式の中の $(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)$ は射影演算子であるから逆演算子はない. このため, 古典論の運動方程式はゲージ固定せずには解けない. しかし, ランジュバン方程式 (8.4) は $\partial_t A_\mu$ という項のおかげでゲージ固定をしなくても解けたのである.

そして, (8.7) 式を用いて熱平衡極限での相関関数を求めれば,

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \langle A_\mu(k, t) A_\nu(k', t') \rangle \\ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(k+k') [k^{-2} (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) + 2t k_\mu k_\nu / k^2] \end{aligned}$$

となる. t に比例する項を除けば, (8.9) 式はランダウゲージでの 2点関数に他ならない. しかも, t に比例する縦波項は, ゲージ不変な量には現れない. したがってパリジとウーの主張 ①

は正しいように見える。確かに通常のゲージ固定法は使っていない。しかし彼らは(8.6)式のよ
うに、 A_μ の初期値をゼロとおいた。これは重大な仮定である。ランジュバン方程式(8.4)の右
辺に $(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)$ という射影演算子があるため、縦波成分 A_μ^L と横波成分 A_μ^T に対するラン
ジュバン方程式はそれぞれ、

$$(8.10a) \quad \partial_t A_\mu^L(k, t) = \eta_\mu^L(k, t),$$

$$(8.10b) \quad \partial_t A_\mu^T(k, t) = -k^2 A_\mu^T(k, t) + \eta_\mu^T(k, t)$$

となる。(8.10a)は減衰項を欠くため、 A_μ^L はランダムウォークを行ない、初期値 $A_\mu^L(k, t=0)$
は $t \rightarrow \infty$ でも生き残る。これは、作用 S のゲージ不変性、言いかえれば $\frac{\delta S}{\delta A_\mu^L} = 0$ の反映である。
ゆえに初期値をゼロと置くことは、ある特別な場合を選択したことを意味する。

一般に、 A_μ^L に対する初期値を

$$(8.11) \quad A_\mu^L(k, t=0) = k^{-2} \cdot k_\mu \phi(k)$$

とおくことにしよう。 $\phi(k)$ は適当なスカラー関数とする。すると(8.9)式の右辺には
 $k_\mu k'_\nu \phi(k) \phi(k') / k^2 k'^2$ という項が付加される。時空一様性を保証するには、 $\phi=0$ のまわりの対称
分布をとって ϕ について平均すればよい。この場合、(8.9)式には、 $k_\mu k'_\nu \phi(k) \phi(k') / k^2 k'^2$ とい
う項が付加されるわけである。 ϕ の分布幅を与える正の無次元パラメーターを α とし、 A_μ^L の実
数性を考慮に入れれば、

$$(8.12) \quad \overline{\phi(k) \phi(k')} = -\alpha \delta(k+k')$$

が得られる。これを用いると、(8.9)式の右辺には経路積分法で計算した2点関数(8.3)と全く
同形の式が出現する。しかし、確率過程量子化の場合は A_μ^L の初期分布の幅からゲージパラメー
ター α が現れるのである。

従って、パリジ・ウーの主張①は完全には正しくなかった。しかし、作用積分に $\frac{1}{2\alpha} \int d^4x$
 $\partial_\mu A_\mu$ というゲージ固定項を入れる必要がないという点では正しかったわけである。

それでは次に、非可換ゲージ場の場合を考えよう。作用(7.9)の与えるランジュバン方程式
は、 A_μ^a について3次と4次の自己相己作用の項を持つ。しかし、自由場の場合($g=0$ の場合)
は可換ゲージ場の場合と同じ形になるから、ゲージ固定項

$$(8.13) \quad \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \sum_a (\partial_\mu A_\mu^a)^2$$

に頼ることなく量子化できて、(8.9)式と同形の2点関数を得る。すなわち、

$$(8.14) \quad \langle A_\mu^a(k, t) A_\nu^b(k', t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta_{ab} \delta(k+k') [k^{-2} (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) + 2t k_\mu k_\nu / k^2]$$

となる。また、 t が有限かつ $t \neq t'$ の場合の $\langle A_\mu^a(k, t) A_\nu^b(k', t') \rangle$ を用いて§6のような摂動
展開を行なうことも可能である。詳しい分析⁹⁾によれば、横波成分 $A_\mu^{aT} = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) A_\mu^a$ が
通常の場合の理論のグルーオンが与える展開項を与える一方、縦波成分がファデェフ・ポポフ・
ゴースト場の効果を与えることがわかった。確率過程量子化法ではゴースト場の導入は必要な
い。こうして、パリジとウーの推測②が確かめられた。

§9. 非可換ゲージ場の確率過程量子化とゲージ固定

前節で、我々は、確率過程量子化法ではゲージ固定項を用いずにゲージ場の量子化ができることを見た。このことは、特に非可換ゲージ場の場合にはゴースト場を導入することなしに理論のゲージ不変性とユニタリティーが保たれることを意味する。この利点はランダムウォークする縦波成分のおかげなのであるが、実際の計算(例えば摂動計算)では、 t に比例する発散項を生み出すのでわずらわしい。もちろん、ゲージ不変量の計算の場合には、発散項は最終的にはすべて打ち消し合ってなくなってしまうのであるが、途中の計算はめんどうである。しかし、これは退治できる¹⁰⁾。その退治法について、これから述べていこう。

最も簡単な退治法は、作用に通常のゲージ固定項(8.13)を付け加え、その作用からランジュバン方程式をつくることである。この場合、縦波成分 A^t のランジュバン方程式には、減衰力の項として $-a^{-1}k^2 A^t_a$ が付け加わる。このため、 t に比例する発散も消滅し、初期値が長時間極限に生き残ることもない。だが、この方法がゲージ不変性とユニタリティーをこわすことは周知の通りである。

ここで、ゲージ固定の意味について考えてみよう。通常のゲージ固定項(8.13)を作用に付け加えることは、系にホロノーム型拘束条件

$$(9.1) \quad \partial_\mu(\partial_\nu A^a_\nu) = 0$$

を課すことを意味する。対応するランジュバン方程式は(9.1)式で表わされる(A^a_μ の関数空間中の)「拘束面」に A^a_μ を閉じ込めておこうとする「拘束力」を付加したものになる。この拘束力が前述の減衰力である。この拘束力は、拘束面に垂直な方向を向いている(図9.1参照)。

そこで、(9.1)のかわりに、

$$(9.2) \quad D^{ab}_\mu(\partial_\nu A^b_\nu) = 0$$

という拘束条件を課してみよう。ただし、 $D^{ab}_\mu = \partial_\mu \delta^{ab} + gf^{abc} A^c_\mu$ は共変微分である。この場合、ランジュバン方程式に

$$(9.3) \quad a^{-1} D^{ab}_\mu(\partial_\nu A^b_\nu)$$

という新しい拘束力の項が付け加わる。ここで重要なのは、(9.2)式が非ホロノーム型の拘束条件であり、積分形式に書いて作用積分の中に収めることはできないという点である。すなわち、ハミルトニアンやラグランジュアンを基礎とする従来の量子化法の枠内では考えられない拘束条件である。(9.2)のような条件を課すことを、「確率過程的ゲージ固定」という。

くわしい分析¹⁰⁾¹¹⁾によれば、(9.3)中の D^{ab}_μ を定義通りに分解したとき、その第1項が縦波成分に対する上記の減衰力を与える一方、第2項(非線形項)が正にファデーフ・ポポフ項を生む。しかも、(9.3)の拘束力は、 A^a_μ の関数空間内では、 A^a_μ がゲージ変換によって変化していく方向に平行であり、従ってゲージ不変量の期待値には何の影響も与えない。通常の場の量子論におけるファデーフ・ポポフ・ゴースト場の処理の煩雑さに比べれば、これはすっきりとしている¹²⁾。

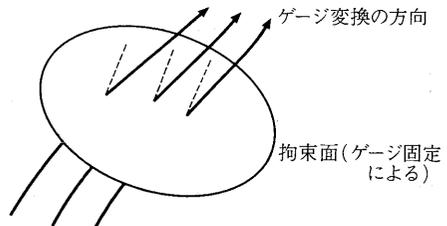


図9.1 ゲージ固定によって定められる拘束面とゲージ変換の方向。点線は、通常のゲージ固定により現れる拘束力の方向。

§ 10. 拘束条件付きの系の確率過程量子化¹³⁾

拘束条件付きの系には、物理的に重要なものが多い。例えばゲージ場は一種の拘束条件付きの系とみなすことが可能だし、物性物理学でよく研究されているイジングモデルや、ゲージ場と似た性質を持っている非線形シグマモデルも拘束条件付きの系である。この節では、拘束条件付きの系の確率過程量子化について述べる。

簡単のため、座標 $q=(q_1, q_2, \dots, q_N)$ と作用 S で記述される N 自由度の力学系を考える。 $N \rightarrow \infty$ としたとき、または $1, 2, \dots, N$ という番号づけを連続パラメーターで行なった場合、場の量子論に移行する。すなわち、 $1, 2, \dots, N$ は、通常的时间変数または4次元ユークリッド座標を有限自由度化したものと思えばよい。この系にホロノーム型の拘束条件

$$(10.1) \quad F^a(q)=0 \quad (a=1, 2, \dots, M; M < N)$$

が課されている場合を考える。径路積分量子化法によれば、このような拘束条件付きの系における物理量 $f(q)$ の真空期待値は

$$(10.2a) \quad \langle f(q) \rangle = \int d\mu f(q) / \int d\mu,$$

$$(10.2b) \quad d\mu = \prod_i dq_i \prod_a \delta(F^a(q)) \sqrt{\det(D^{ab})} \exp(-S)$$

と書ける。ここに、行列 D は、その (a, b) 要素が

$$(10.3) \quad D^{ab} = \sum_i \frac{\partial F^a}{\partial q_i} \frac{\partial F^b}{\partial q_i}$$

で定義されるものである。ただし、 $\det D \neq 0$ と仮定する。

さて、我々の問題は、熱平衡分布 ($t \rightarrow \infty$ での分布) として (10.2b) を与えるような、 q_i に対するランジュバン方程式をつくることである。古典力学では、拘束条件がある場合に運動方程式をつくるには、「ラグランジュの未定乗数法」を使う。そこで、そのやり方をまねて、まず次のランジュバン方程式を設定する。

$$(10.4a) \quad \frac{d}{dt} q_i(t) = - \left(\frac{\delta S}{\delta q_i} + \lambda^a \frac{\partial F^a}{\partial q_i} \right) + \eta_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

$$(10.4b) \quad F^a(q(t)) = 0 \quad (a=1, 2, \dots, M).$$

ここで、 λ^a はラグランジュの未定乗数である。(古典力学では、(10.4a) で左辺と η をゼロにした方程式を設定した。) また、(10.4b) は、我々が「すべての仮想時間を通して $F^a=0$ という拘束条件が成立せよ」という強い条件を課したことを意味する。

次のステップは、 λ^a の決定である。もし、(10.4b) がすべての t に対して成立するなら、

$$(10.5) \quad \frac{\partial F^a}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0$$

も成立するはずである。そこで、(10.4a) を (10.5) に代入し、 λ^a について解くと、

$$(10.6) \quad \lambda^a = (D^{-1})^{ab} \frac{\partial F^b}{\partial q_i} \left(- \frac{\delta S}{\delta q_i} + \eta_i \right)$$

を得る。この λ^a を (10.4a) に代入すれば、

$$(10.7) \quad \frac{d}{dt} q_i(t) = P_{ij} \left(-\frac{\delta S}{\delta q_j} + \eta_j \right)$$

$$(10.8) \quad P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial F^a}{\partial q_i} (D^{-1})^{ab} \frac{\partial F^b}{\partial q_j}$$

を得る。これが求めていたランジュバン方程式である。\$P_{ij}\$ は拘束面 \$F^a(q)=0\$ への射影演算子である。すなわち、(10.7)式の右辺は、通常のランジュバン方程式の右辺に、この射影演算子を作用させたものである。問題設定から見て当然であろう。(10.7)式の解の熱平衡分布(\$t \to \infty\$での分布)が(10.2b)になることは、微分幾何の方法を使ってフォッカー・プランク方程式を導けば比較的容易に証明できる¹³⁾。

これで、拘束条件付きの系に対するランジュバン方程式がつくれた。しかしながら、これは一般に解析的には解けず、物理量の計算は数値計算にたよらざるを得ない。ところが、(10.7)式はそのままでは数値計算には不向きである。その理由は次の通り。(10.7)式を数値的に解くには、まず差分化しなければならない；

$$(10.9a) \quad q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \Delta q_i^{(T)}(t),$$

$$(10.9b) \quad \Delta q_i^{(T)}(t) = \left[p_{ij} \left(-\frac{\delta S}{\delta q_j} + \eta_j \right) \right]_t \Delta t.$$

この場合、\$\Delta q_i^{(T)}(t)\$は、有限なので、拘束面が曲がっている(すなわち、\$F(q)\$が\$q\$に対して非線形)場合には、たとえ \$q_i(t)\$が拘束面上にあったとしても、\$q_i(t + \Delta t)\$は拘束面からとび出してしまう(図 10.1 a 参照)。つまり、差分化した方程式(10.9)の解は、拘束条件を満たさなくなるのである。

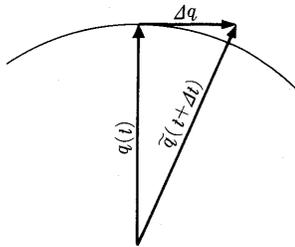


図 10.1a 拘束面からのとび出し

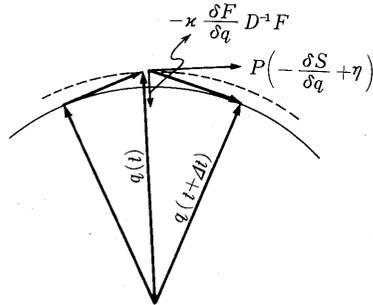


図 10.1b 拘束面への引き戻し

この問題は「拘束条件をゆるめる」ことで解決できる。(10.4b)の拘束条件を、

$$\frac{d}{dt} F^a(q(t)) = -\chi F^a(q(t))$$

で置きかえよう。\$\chi\$ は正の定数である。明らかに、\$t \to \infty\$で \$F^a \to 0\$だから、\$t \to \infty\$ではランジュバン方程式は(10.7)に帰着する。この方法を CC 法(Converging Constraint 法)と呼ぶ。さて、この置きかえによって、差分化されたランジュバン方程式は次のようになる。

$$(10.11a) \quad q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \Delta q_i^{(T)}(t) + \Delta q_i^{(N)}(t).$$

ここで、\$\Delta q_i^{(T)}\$は(10.9b)で与えられ、\$\Delta q_i^{(N)}(t)\$は

$$(10.11b) \quad \Delta q_i^{(N)}(t) = \left[-\frac{\partial F^a}{\partial q_i} (D^{-1})^{ab} F^b \right]_t (x\Delta t)$$

で定義される。つけ足された $\Delta q_i^{(N)}$ という増分は拘束面上ではゼロであるが、 q が拘束面をとび出したときには拘束面に垂直な方向を向いたゼロでないベクトルとなり、 q は拘束面に引き戻す復元力を与えてくれる。図 10.1b を見ていただきたい。なお、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、拘束面からのとび出しが起こらないので、 $\Delta q_i^{(N)}$ は常にゼロである。

さて、拘束条件付きの系の具体例として、格子上の 2 次元 $O(N)$ 非線形シグマモデルを考えよう。このモデルの作用と拘束条件はそれぞれ

$$(10.12a) \quad S = -\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} \sum_a J_{ij} \sigma_i^a \sigma_j^a,$$

$$(10.12b) \quad F_i(\sigma) = \sum_{a=1}^N \sigma_i^a \sigma_i^a - 1$$

である。ここで、 i, j は格子点、 a は内部空間の自由度を表わす。 β は正の定数で、統計力学における温度の逆数に対応するものである。また、 J_{ij} は i と j が隣合う格子点ならば 1、それ以

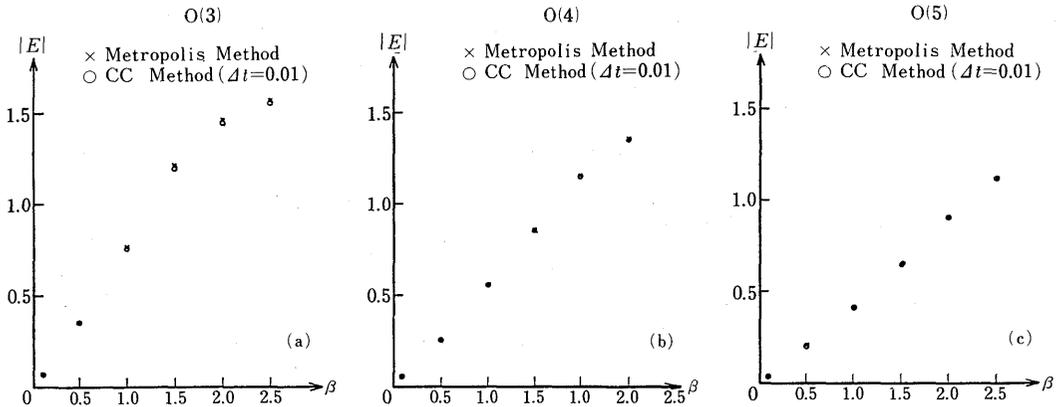


図 10.2 $O(N)$ 非線形シグマモデルの内部エネルギー

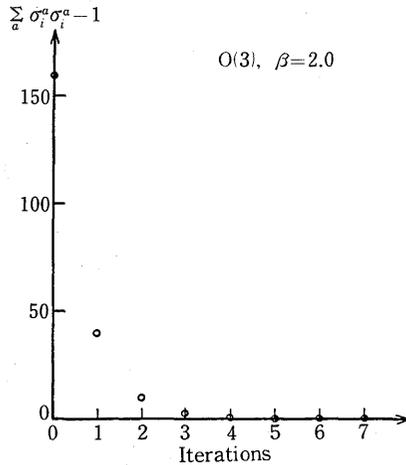


図 10.3 拘束面に引き戻す力の効果

外ならばゼロとする。(10.12b)で決まる拘束面は、内部空間における半径1の N 次元球の球面である。(10.12)から(10.11)に対応するランジュバン方程式をつくると

$$(10.13a) \quad \sigma_i^a(t+\Delta t) = \sigma_i^a(t) + \Delta\sigma_i^{a(T)}(t) + \Delta\sigma_i^{a(N)}(t),$$

$$(10.13b) \quad \Delta\sigma_i^{a(T)}(t) = \sum_b \left[\left\{ \delta_{ab} - \frac{\sigma_i^a \sigma_i^b}{\sum_c \sigma_i^c \sigma_i^c} \right\} \left\{ \beta \sum_j J_{ij} \sigma_j^b + \eta_i^b \right\} \right]_t \Delta t,$$

$$(10.13c) \quad \Delta\sigma_i^{a(N)}(t) = -\frac{\chi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sum_c \sigma_i^c \sigma_i^c} \right\}_t \sigma_i^a(t) \Delta t$$

となる。この方程式を用いて、内部エネルギー

$$E = -\frac{1}{2V} \langle \sum_a \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i^a \sigma_j^a \rangle$$

(V : 系の体積)

を計算してみた。結果は、経路積分法に基づく数値計算法(メトロポリス法)の結果と完全に一致した(図10.2参照)。要した計算時間はほぼ同じであった。

最後に、拘束面に引き戻す力の効果を調べた結果を紹介しておく。 χ を、 $\chi\Delta t=1$ と選ぶ。(10.12)のモデルで、力学変数 σ_i^a を拘束面からはるかに離れたところに置いておく。それでも、数回のアップデートで、すぐに拘束面にもどってしまう(図10.3参照)。初期条件として、無理やり力学変数を拘束面上に発生させねばならないなどという必要はない。この特質は、拘束面の形がもっと複雑な場合には、大きなメリットとなるであろう。

§ 11. 長距離相関関数の数値計算¹³⁾

確率過程量子化法に基づく数値計算法を用いると、非常に長い距離にわたっての相関関数が、比較的容易に計算できる。従来の数値計算法にはなかった利点である。

相関関数を計算する意義は、距離に対する指数関数的減少の速さから、粒子質量 m や第1エネルギー差 ΔE が求まるという点にある。いま、 $\phi(x)$ をある粒子を記述する場とすれば、2点相関関数 $G(x-y)$ は

$$G(x-y) \equiv \langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \text{const} \cdot \exp(-m|x-y|)$$

のようにふるまう。 $G(x-y)$ が $|x-y|$ に対して指数関数的にふるまうのは、あくまでも $|x-y|$ が充分大きい場合であることに注意しなければならない。 m の計算は大きな $|x-y|$ に対して行なう必要がある。

ところが、大きな $|x-y|$ に対する $G(x-y)$ の値は、一般には非常に小さく、数値計算を行なっても、通常真の値は統計誤差の中にうもれてしまう。このことが、 m の数値計算に要する時間を極めて長くとらなければならない理由のひとつである。しかし、以下に述べる計算法を用いると、計算時間ははるかに短くなる。

計算の手順を説明しよう。系を記述する作用を S とする。場 $\phi(x)$ を格子化し、 ϕ_l とする。 l は格子点を表わす。次に、作用 S に付加項を加え、

$$(11.1) \quad S_h = S - h\phi_{l=0}$$

という新たな作用を定義する。 h は小さな実定数である。物理的には、 $l=0$ という格子点に、 h という強さの外場があると思えばよい。(11.1)の作用に対するランジュバン方程式は、

$$(11.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_l(t) = -\frac{\delta S}{\delta \phi_l(t)} + h\delta_{l0} + \eta_l(t)$$

となる。(11.2)において、 $h \neq 0$ の場合と $h=0$ の場合について $\langle \phi_l \rangle$ を計算すると、それらの差から相関関数を求めることができる。すなわち、線形応答でおなじみの公式

$$(11.3) \quad \begin{aligned} G(l) &\equiv \langle \phi_l \phi_0 \rangle_{h=0} - \langle \phi_l \rangle_{h=0} \langle \phi_0 \rangle_{h=0}, \\ &= \frac{d}{dh} \langle \phi_l \rangle_h \Big|_{h=0}, \\ &= \frac{1}{h} \{ \langle \phi_l \rangle_h - \langle \phi_l \rangle_{h=0} \} + O(h) \end{aligned}$$

に従い、右辺を計算すればよい。(2段目の等号は、 $\langle \phi_l \rangle_h$ の経路積分法での定義式から簡単に証明できる。)ただし、 $\langle \phi_l \rangle_h$ と $\langle \phi_l \rangle_{h=0}$ の数値計算の際に、 η に対して同一の乱数列を使うことが重要である。そうすると、両者の引き算の際に、両者の統計誤差がキャンセルしてくれる。「同一の乱数列を使う」という方法は、乱数の棄却を含む通常の数値計算法では不可能である点を強調しておきたい¹³⁾。

図 11.1 に、通常の数値計算法(メトロポリス法)と、今述べた方法による相関関数の計算結果を示す。とりあげた系は、§4の(4.17)式で与えられるポテンシャルモデルである。メトロポリス法では、30,000回の反復計算で $l \approx 5$ ぐらいまでしか意味のある値が求まっていない。一方、ここで述べた方法では、たった1,500回の反復計算により、全格子領域にわたって相関関数の値が求まってしまう。

この計算法は、 $O(N)$ 非線形シグマモデルの相関関数にも極めてよい結果を与える。ただし、

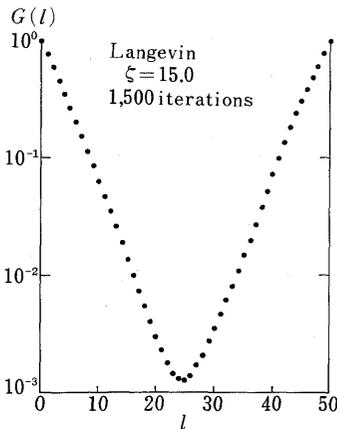


図 11.1a ポテンシャルモデルの相関関数 (ランジュバン方程式による)

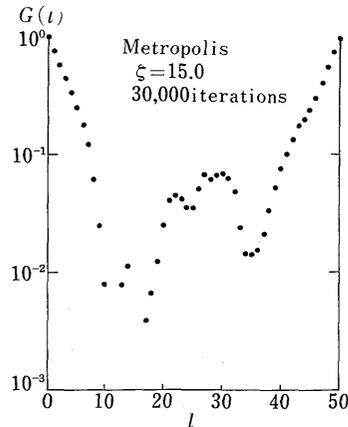


図 11.1b ポテンシャルモデルの相関関数 (メトロポリス法)

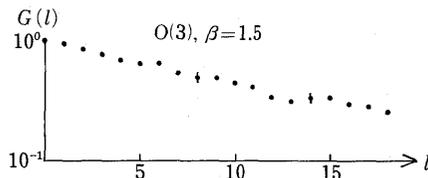


図 11.2 O(3)非線形シグマモデルの相関関数

$N=3$ の場合は系の非線形性の影響が強く、他の場合 ($N \geq 4$) ほど良い結果は得られない。しかし、これは改善可能である。系の非線形性はドリフト項の中に現れるが、その影響は熱平衡状態に至る前に大きく、その後はランダム項と同程度の寄与となることに注意しよう。(その結果、両者の寄与がつり合って、 $\frac{d}{dt} \langle \sigma_i^a(t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ となる。)従って、初期条件として、熱平衡状態にある力学変数(場)を採用すれば、強い非線形性の影響を最小限におさえることができる。この方法で計算した結果を図 11.2 に示す。 $l \approx 20$ まで値が求まっている。これは一万回程度の反復計算によるものである。一方、通常の方法では、数万回の反復計算で、 l が数個の程度までしか求まっていない。

§ 12. 終わりに

以上、確率過程量子化法のあらましを、著者の研究室の成果も含めて紹介してきたわけだが、触れることのできなかつたことも多い。例えば、重力場やフェルミオン場¹⁴⁾の量子化、格子QCDの数値計算への応用⁷⁾、確率過程量子化法独特のくり込み¹⁵⁾や最近提案されたミクロカノニカル量子化法¹⁶⁾との対応など、興味深い話題はまだまだある。残念ながら、すでに予定のページ数をかなりオーバーしてしまった。このへんで話を終わりたいと思う。

本稿の中で、§ 4 と § 11 で紹介した数値計算の一部は、統計数理研究所のコンピューターを使わせていただいて得たものである。深く感謝する。また、本稿は昭和 60 年度に同研究所で行なった著者の講義をもとにしている。講義録をもとに本稿を作成するにあたっては、統計数理研究所の松縄規氏、早稲田大学の田中覚君、柴田浩行君の協力を得た。厚く感謝する。また、§ 5 は講義にはなかったが、田中君と協同で作成し、付加したものである。

参 考 文 献

- 1) E. Schrödinger, (1931). *Sitzungsb. Press. Akad. W.* 144.
J. Metadier, (1931). *Comptes Rendns*, **193** 1173.
R. Fürth, (1933). *Zeits. f. Phys.*, **81** 143.
- 2) J. von Neumann (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin. Springer).
なお、日本語訳がある：井上健, 広重徹, 恒藤敏彦訳「量子力学の数学的基礎」, みすず書房, 東京, 1957年.
- 3) D. Bohm (1952). *Rhys. Rev.*, **85** 166.
- 4) E. Nelson (1966). *Rhys. Rev.*, **150** 107.
- 5) G. Parisi and Wu Yongshi (1981). *Sci. Sin.*, **24**, 483.
なお、次の解説論文が参考になるでしょう。
並木美喜雄, 岡野啓介 (1983). 日本物理学会誌, **38** 659.
岡野啓介 (1984). フィジクス 5, # **41**. 660.
J.R. Klauder (1983). *Acta Physica Austriaca.*, Suppl. XXV (Springer) 251.
- 6) N. Nakazato, M. Namiki and H. Shibata (1986). *Prog. Theor. Phys.*, **76**, 708.
M. Namiki and Y. Yamanaka (1986). *Prog. Theor. Phys.*, **75**, 1447.
- 7) M. Namiki, I. Ohba and S. Tanaka, プレプリント, WU-HEP-86-4.
- 8) H. Nakazato, M. Namiki, I. Ohba and K. Okano (1983). *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 298.
- 9) M. Namiki, I. Ohba, K. Okano and Y. Yamanaka (1983). *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 1580.
- 10) H. Nakagoshi, M. Namiki, I. Ohba and K. Okano (1983). *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 326.
- 11) D. Zwanziger (1981). *Nucl. Phys.*, B **192** 259.
L. Baulien and D. Zwanziger (1981). *Nucl. Phys.* B **193**. 163.
- 12) E. Seiler, I.O. Stamatescu and D. Zwanziger (1984). *Nucl. Phys.*, B **239** 177.

- 13) M. Namiki, I. Ohba and K. Okano (1985). *Prog. Theor. Phys.*, **72**, 350.
M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, M. Rikihisa and S. Tanaka (1985). *Prog. Theor. Phys.*, **73**, 185.
M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, M. Rikihisa and S. Tanaka (1986). *Prog. Theor. Phys.*, **76**, 501.
- 14) T. Fukai, H. Nakazato, I. Ohba, K. Okano and Y. Yamanaka (1983). *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 1600.
- 15) M. Namiki and Y. Yamanaka, *Hadronic J* (1984). **7**, 594.
S. Chaturvedi, A.K. Kapoor and V. Srinivasan, プレプリント HUTP-85/1.
- 16) D.J.E. Collaway and A. Rahman (1982). *Phys. Rev. Letters.*, **49** 613.

Stochastic Quantization Method

Mikio Namiki

(Department of Physics, Waseda University)

The stochastic quantization method (hereafter SQM), proposed by Parisi and Wu in 1981, offers us a new way of quantizing dynamical systems different from the conventional methods, i.e. the canonical and path-integral ones. The method is so designed as to produce quantum theory as a thermal equilibrium limit of a hypothetical stochastic process with respect to a "fictitious time" other than the ordinary time. Every quantum-mechanical average can be obtained from solutions of the "Langevin equation".

After a brief survey of SQM, we develop the perturbative approach to the correlation functions to give propagators and energy gaps. New theoretical prescriptions are also presented to extract energy gaps from the fictitious-time dependence of the correlation functions, and to formulate the "Langevin equation" directly for a general physical quantity.

Applying SQM to gauge fields, we observe that it is not necessary to introduce the gauge fixing term and ghost field in Lagrangian, contrary to the conventional quantizations. It is also shown that we can formulate the stochastic gauge fixing without destruction of the gauge invariance and the unitarity.

Finally we formulate a general theory to quantize constrained systems by means of SQM and apply it to numerical simulations of the $O(N)$ nonlinear σ -model. The numerical simulations tells us that SQM provides us a powerful tool to obtain long-range correlation functions.