

ビュッフォンの針の一般化と 応用上の注意

横浜市立大学文理学部 多 賀 保 志

(1985年10月 受付)

要 旨

ビュッフォンの針の問題は様々の形に拡張され、各種の場面に応用されている。ここでは動物の足跡を曲がったビュッフォンの針とみなし、一定間隔に引かれた平行線群とそれら足跡の曲線との交点数を調べて、ある地域内に生息する動物集団の大きさ(総数)を推定する場合、あるゆるい条件の下で交点数の期待値と分散を求めた。その際に集団の平均足跡長の推定も必要となるが、それは繊維群の平均長の推定と類似の問題であり、それらについても若干の考察を行った。

1. はじめに

「平面上に h の間隔で引かれた平行線群があって、そこへ長さ l ($\leq h$) の真直ぐな針をランダムに投げたとき、それが平行線のどれかと交わる確率 p は如何？」というのが、最初ビュッフォンにより提出された問題で、その答は

$$(1.1) \quad p = \frac{2l}{\pi h}$$

であることはよく知られている。この問題はそれ以後針や平行線を円弧などの曲線に代えた形に拡張され、また動物母集団の大きさの推定などに応用されてきた(林知己夫他(1972)参照)。一方、ビッテルリッヒが立木の胸高直径の推定に考案した幾何学的方法が様々に拡張され、曲線の長さ、領域の面積や体積の推定に利用されているが、これもビュッフォンの針の問題とかわりをもつ(増山元三郎(1968)参照)。

ここでは、平面に固定されたなめらかな曲線状のビュッフォンの針と、ランダムな方向に一定間隔 h で引かれた平行線群との交点数 y の期待値と分散を求め、それを動物母集団の大きさ(総数) N の推定に応用する場合について若干の注意を述べた。それは繊維群の平均長の推定とも関連があるので、それについても言及した。

2. 曲線状のビュッフォンの針

xy 平面上で滑かな曲線 AB を考える。すなわち、 AB 上の点 (x, y) がパラメータ t により

$$(2.1) \quad x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表され、かつその導関数 $x'(t), y'(t)$ が存在して連続であると仮定する(ただし、導関数の存

にしない点が有限個あってもよい).

いま, 区間 $[a, b]$ の分割

$$(2.2) \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$$

に対応して, 曲線 (2.1) は k 個の弧 (t_{i-1}, t_i) にわけられるが, それらの分点を順次に線分 $\overline{t_{i-1}t_i}$ で結ぶと, 曲線 AB に内接する折れ線 $\langle t_0t_1t_2 \cdots t_{k-1}t_k \rangle$ がえられる. この折れ線の長さを L_k と表し, (2.2) の分割を無限に細かくしてゆくと L_k は収束し, その極限值 L を曲線 AB の長さとする.

さてこのような曲線 AB をビュッフォンの針と考えたとき, 曲線 AB と平行線との交点数 y の期待値と分散を求めてみよう. それには, 上に述べた折れ線 $\langle t_0t_1 \cdots t_{k-1}t_k \rangle$ と平行線との交点数 η_k の期待値と分散を求め, それらの極限を考えるのが自然であろう. そこで折れ線の i 番目の線分 $\overline{t_{i-1}t_i}$ の長さを l_i とし, それに対応してつぎのような確率変数 ξ_i を考える.

$$(2.3) \quad \xi_i = \begin{cases} 1 & (t_{i-1}t_i \text{ が平行線と交わる時}) \\ 0 & (\text{そうでない時}) \end{cases}$$

すると折れ線と平行線の交点数 η_k は

$$(2.4) \quad \eta_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$$

と表される. ここで曲線の巾 (曲線上の2点間の距離の最大値) が平行線の間隔 h より小とすれば, 曲線 AB は同時に2つの平行線と交わることはなく, かつ $l_i \leq h$ であるから, (1.1) より η_k の期待値と分散は

$$(2.5) \quad E\{\eta_k\} = \sum_{i=1}^k E\{\xi_i\} = \sum_{i=1}^k \frac{2l_i}{\pi h} = \frac{2L_k}{\pi h}$$

$$(2.6) \quad V(\eta_k) = \sum_{i=1}^k V(\xi_i) + \sum_{i \neq j}^k \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) \\ = \frac{2L_k}{\pi h} \left(1 - \frac{2L_k}{\pi h}\right) + \sum_{i \neq j}^k P\{\xi_i \xi_j = 1\}$$

となる.

ここで $k \rightarrow \infty$, $\delta = \max_{1 \leq i \leq k} l_i \rightarrow 0$ とすると, y の期待値と分散はそれらの極限として

$$(2.7) \quad E\{y\} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} E\{\eta_k\} = \frac{2L}{\pi h}$$

$$(2.8) \quad V(y) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} V(\eta_k) \\ = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \sum_{i \neq j}^k P\{\xi_i \xi_j = 1\}^{1)}$$

となる. (2.8) の右辺第2項は, 曲線 AB 上の相異なる2点を平行線が通る確率である (平行線が曲線 AB と j 回交わるときは, その平行線は $j(j-1)$ 回重複して数えられることに注意). この確率をより明確に表現するには, 次のようにするとよい.

運動は相対的だから, 曲線 AB を xy 平面上のある位置に固定し, 平行線がランダムに変動す

1) η_k に対応する曲線 C の分割をより細かく分割したときの交点数を $\eta_{k'}$ とすると, $\eta_k \leq \eta_{k'} \leq y$ となることと容易に示される. さらに滑らかな曲線 C の分割を次第に細かくしてゆくと, 任意に固定された1つの平行線について $\eta_k \rightarrow y$ が示される. よって単調収束定理により, (2.7), (2.8) が成り立つ.

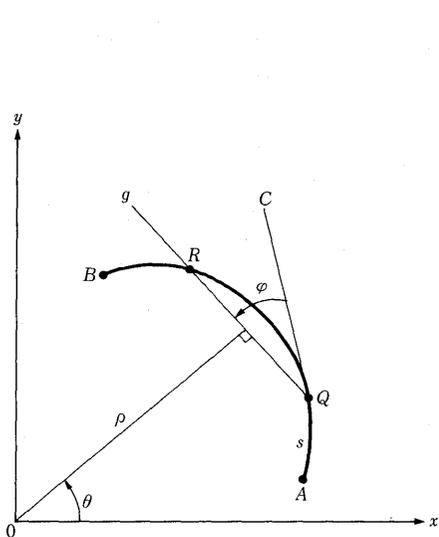


図 1.

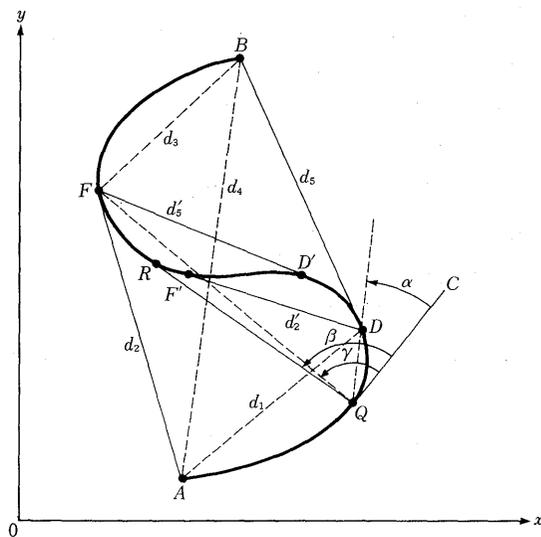


図 2.

ると考える. すなわち, 平行線群中の 1 本を代表とし, 原点からその直線へ下した垂線の長さを ρ , 垂線と x 軸とのなす角を θ とするとき, (ρ, θ) の同時分布の確率素分が

$$(2.9) \quad \frac{1}{\pi h} d\rho d\theta \quad \left(\begin{array}{l} 0 < \rho < h \\ 0 < \theta < \pi \end{array} \right)$$

で与えられるとし, 曲線 AB の x 座標は区間 $[0, h]$ の間にくるようにしておく.

さらに曲線 AB 上の任意の点 Q とその点を通る任意の直線 g を考え, 端点 A から曲線にそって測った Q までの距離を S , Q における曲線 AB の接線 QC と直線 g とのなす角を φ とし, (ρ, θ) を (s, φ) に変換すると, 以後の解析に便利である. このとき, (2.9) の確率素分はつぎのように変換される ((図 1) 参照).

$$(2.10) \quad \frac{\varepsilon}{\pi h} \sin \varphi d\varphi ds \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq s \leq L \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right)$$

この変換によって, (2.8) はつぎのようにかきかえられる.

$$(2.11) \quad V(y) = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h} \right) + \frac{1}{\pi h} \int_D \int \varepsilon \sin \varphi d\varphi ds$$

ここで右辺第 2 項の積分領域 D は「平行線が曲線上の相異なる 2 点を通る」事象に対応する (s, φ) の領域を表し, ε は φ の増加・減少に応じて $+1$ または -1 をとる符号関数を表す²⁾.

いま図 1 において点 Q を一応固定し, 弧 QB 上の動点 R を Q に通る直線 g を考える. 点 R が Q から B まで動くとき, 接線 QC と直線 g のなす角 φ が $0 \leq \varphi \leq \pi$ の範囲で単調に増加する場合には, (2.11) の右辺第 2 項の積分は

2) 曲線の中が h 以下として (2.7) や (2.11) を導いたが, この条件を除いてもそれらは成立する. ただし (2.11) 式の右辺の領域 D は「平行線群が曲線上の相異なる 2 点を通る」 (s, φ) の領域を表すと考える.

$$(2.12) \quad \int_D \int \varepsilon \sin \varphi d\varphi ds = 2 \int_0^L \{1 - \cos \alpha(s)\} ds$$

とかき直される。ここで $\alpha(s)$ は直線 QB と接線 QC のなす角を表し、 $\cos \alpha(s)$ は直線 QB と接線 QC の方向余弦の内積に等しいことに注意すると、

$$\cos \alpha(s) = \frac{[x(L) - x(s)] \frac{dx}{ds} + [y(L) - y(s)] \frac{dy}{ds}}{\sqrt{[x(L) - x(s)]^2 + [y(L) - y(s)]^2}}$$

となることがわかる (ただしパラメータを s として)。これを (2.12) の右辺に代入すると

$$(2.13) \quad \int_D \int \varepsilon \sin \varphi d\varphi ds = 2(L - d)$$

ここで d は 2 点 $(x(0), y(0)), (x(L), y(L))$ 間の距離となる。よって (2.11) はつぎのようにかきかえられる。

$$(2.14) \quad V(y) = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \frac{2}{\pi h} (L - d)$$

とくに $\alpha(s) \equiv 0$ (AB が直線) の場合は $d=L$ となるので、(2.14) の右辺第 2 項は 0 となり、(2.14) は直線の場合の $V(y)$ と一致する。また AB が閉凸曲線の場合は $d=0$ となり、(2.14) の右辺第 2 項は $2L/\pi h$ となるが、これらはランダムに引かれた直線が閉凸曲線と交わる確率の公式と一致する (栗田稔 (1956), 積分幾何学参照)。

しかし曲線が S 字形のように曲がりくねる場合 (図 2) には、点 $Q(s)$ より曲線 AB に引いた接線の接点 $R(t(s))$ において、角 φ は増加から減少にかわり、しかも $Q(s)$ の動きにつれて $R(t(s))$ も動いてゆく (ここで $s, t(s)$ は A から曲線にそって測った Q, R までの弧の長さを表すパラメータとする)。このような場合には、曲線 AB を 3 つの弧 AD, DF, FB にわけ、それらと平行線の交点数をそれぞれ y_1, y_2, y_3 とする (ここで D, F はそれぞれ B, A より曲線 AB へ引いた接線の接点)。すると

$$(2.15) \quad \begin{aligned} V(y) &= E\{(y_1 + y_2 + y_3)^2\} - [E\{y\}]^2 \\ &= E\{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)\} - \left(\frac{2L}{\pi h}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $E\{y_i^2\}$ と $E\{y_i y_j\}$ は、(2.14) より

$$E\{y_i^2\} = \frac{2l_i}{\pi h} + \frac{2}{\pi h} (l_i - d_i) \quad (i=1, 3)$$

と表される (l_1, l_3 はそれぞれ弧 AD, BF の長さ、 d_1, d_3 はそれぞれ線分 $\overline{AD}, \overline{BF}$ の長さとする)。

また $E\{y_i y_j\}$ については、つぎのように求められる：

$$(2.16) \quad E\{y_1 y_2\} = 2 \int_0^{l_1} \{[\cos \alpha(s) - \cos \beta(s)] + [\cos \gamma(s) - \cos \beta(s)]\} ds$$

ここで $\alpha(s), \gamma(s)$ は接線 QC がそれぞれ線分 QD, QF となす角、 $\beta(s)$ は 2 つの接線 QC と QR のなす角を表す。ここで $\cos(\beta(s))$ は

$$\cos(\beta(s)) = \frac{[x(t(s)) - x(s)] \frac{dx}{ds} + [y(t(s)) - y(s)] \frac{dy}{ds}}{\sqrt{[x(t(s)) - x(s)]^2 + [y(t(s)) - y(s)]^2}}$$

となるが、さらにこの右辺をかきかえて

$$\cos(\beta(s)) = -\frac{[x(t(s)) - x(s)]\left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} - \frac{dx}{ds}\right) + [y(t(s)) - y(s)]\left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} - \frac{dy}{ds}\right)}{\sqrt{[x(t(s)) - x(s)]^2 + [y(t(s)) - y(s)]^2}} + \delta \frac{dt}{ds}$$

をうる。ここで δ は

$$\delta = \frac{[x(t(s)) - x(s)] \frac{dx}{dt} + [y(t(s)) - y(s)] \frac{dy}{dt}}{\sqrt{[x(t(s)) - x(s)]^2 + [y(t(s)) - y(s)]^2}}$$

だが、これは接線 QR の方向余弦と $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ の内積であるから 1 となる。

以上の点を考慮に入れると、

$$(2.17) \quad E\{y_1^2 + y_2^2 + \sum_{i+j=3}^3 y_i y_j\} = \frac{2}{\pi h} \{2(l_1 + l_3) + d_4 - 2(d_2 + d_5) + 2(d'_2 + d'_5) + 2(l_{21} + l_{22})\}$$

をうる。ここで d_2, d_4, d_5 はそれぞれ 3 つの線分 $\overline{AF}, \overline{AB}, \overline{BD}$ の長さ、 d'_2 と d'_5 はそれぞれ線分 $\overline{DF'}$ と $\overline{FD'}$ の長さ (F', D' はそれぞれ D, F より曲線 AB に引いた接線の接点)、 l_{21} と l_{23} はそれぞれ弧 $\overline{DD'}, \overline{FF'}$ の長さである。

$E\{y_2^2\}$ を求めるには、弧 DF (長さを l_2 とする) をあらためて S 字形曲線と考え、それを 3 つの弧 $\overline{DD'}, \overline{D'F'}, \overline{F'F}$ (長さがそれぞれ l_{21}, l_{22}, l_{23}) にわけて、上と同様な計算をくりかえし行う。その結果を (2.17) の右辺に加えてゆくと、結局

$$E\{y^2\} = \frac{2}{\pi h} \{2(l_1 + 2l_2 + l_3) + d_4 - 2(d_2 + d_5)\}$$

となり、 $V(y)$ として次式がえられる。

$$(2.18) \quad V(y) = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \frac{2}{\pi h} \{L + 2l_2 + d_4 - 2(d_2 + d_5)\}$$

特に曲線が半径 r の半円周に長さ a の線分を加えたスプーン状の図形の場合(図 3)には、上

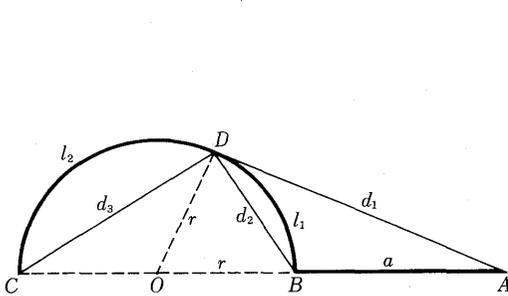


図 3.

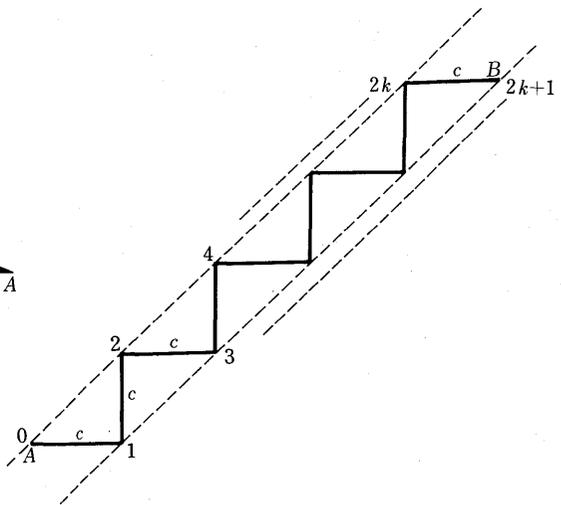


図 4.

と同様な計算により、

$$(2.19) \quad V(y) = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \frac{2L}{\pi h} \left\{1 + \frac{2a + l_1 - d_1 - 2r}{L}\right\}$$

となる。ここで d_1 は端点 A より半円弧に引いた接線の接点 D までの距離(線分 \overline{AD} の長さ)、 l_1 と l_2 はそれぞれ弧 BD , CD の長さである。

さらに、中心から渦巻き状にぐるぐるの外側に広がる曲線についても計算はできるが、やや複雑なので省略するが、その特殊な場合として長さ L の線分を半径 r の円周へ k 重に巻きつけた曲線についての結果は、つぎのようになる。

$$(2.20) \quad V(y) = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \frac{2L}{\pi h} (2k-1)$$

これをみると、 $V(y)$ は k に比例していくらでも大きくなるのがわかる。

また、曲線 AB が図4にみられるようなジグザグ型の折れ線の場合には、(2.11)の右辺第2項が $(\log k)^2$ のオーダーで増大することが示される。

以上を通してみると、曲線 AB が閉凸曲線程度の曲がり方であれば、(2.14)からほぼ

$$(2.21) \quad V(y) \doteq \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \frac{2L}{\pi h}\right) + \frac{2L}{\pi h}$$

とみなしてよいであろう。右辺第1項は AB が直線の場合の y の分散であるが、 $h=L$ とすると右辺第2項は第1項の2.75倍、 $h=2L$ とすると1.47倍である。

3. 動物の生息数の推定上の注意

動物の足跡は一般に曲線ではあるがそれほど複雑ではない(閉凸曲線の程度)とし、対象地域に生息する動物の総数 N の推定量 \hat{N} をつぎのように定める。

$$(3.1) \quad \hat{N} = \frac{\pi h}{2\bar{L}} \sum_{i=1}^N y_i$$

ここで y_i は i 番目の動物の足跡と平行線の交点数、 \bar{L} は N 頭の動物の平均足跡長で一応既知とする。 \hat{N} の期待値は(2.7)より

$$(3.2) \quad E\{\hat{N}\} = \frac{\pi h}{2\bar{L}} \sum_{i=1}^N \frac{2L_i}{\pi h} = N$$

となる (L_i は i 番目の足跡長)。また、 \hat{N} の分散は近似的に(2.21)が適用でき、かつ動物の行動は互いに独立とすれば、 $V(\hat{N})$ は

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V(\hat{N}) &\doteq \left(\frac{\pi h}{2\bar{L}}\right)^2 \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2L_i}{\pi h} \left(1 - \frac{2L_i}{\pi h}\right) + \frac{2L_i}{\pi h} \right\} \\ &= N \left\{ \left(\frac{\pi h}{2\bar{L}}\right)^2 \frac{2\bar{L}}{\pi h} \left(1 - \frac{2\bar{L}}{\pi h}\right) + \frac{\pi h}{2\bar{L}} - \left(\frac{\sigma_L}{\bar{L}}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

と評価される。ここで σ_L^2 は L の分散で

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i^2 - \bar{L}^2$$

である。

この結果は、足跡巾 $D_i \leq h$ であれば $L_i > h$ であっても、成立する。足跡が直線に近い場合には $D_i \approx L_i$ だから、万全を期するには $\max_{1 \leq i \leq N} L_i \leq h$ となるように h を定めるとよいが、(3.3) からわかるように h をあまり大きくするのは好ましくない。そこで h を

$$(3.4) \quad \bar{L} + 3\sigma_L \leq h$$

となるように定めれば良い。しかし、 \bar{L} も σ_L も未知の場合には、予備調査を行うかまたは熟練した猟師に訊ねて、おおよその見当をつけておくとよい。また (3.1) の \bar{N} には平均足跡長 \bar{L} がふくまれているが、これについては COC 法(色素首輪法)、RST 法などにより、かなり精密に \bar{L} を推定しておく必要がある (COC 法や RST 法などについては、林・多賀 (1985) を参照されたい)。

さて芳賀 (1957) は、Poincaré の定理を利用して、繊維群の平均長の推定を行った。すなわち、平面上に固定された閉曲線 C の内部に長短さまざまな曲線がちらばっており (その総延長を A とする)、一方平面内を運動する図形 G (線分、円、格子など) を考え、 G 上に固定した点 M と固定した方向ベクトル \vec{u} を定めておく。点 M が閉曲線 C 内で一様ランダムに動き、方向ベクトル \vec{u} も $(0, 2\pi)$ の範囲で一様分布するとし、図形 G が曲線と交わる時は必ず点 M が C 内にあるものとする (不偏性の条件)。このような条件の下で、 G と曲線群との交点数 y の期待値を求めると、

$$(3.5) \quad E\{y\} = \frac{2LA}{\pi T}$$

となる (Poincaré の定理による)。ここで L は図形 G の長さ、 T は閉曲線 C の面積である。

そこで、閉曲線 G の位置と方向を毎回ランダムに変えながら、 G と繊維の中心線との交点数 y と、 G 内にふくまれる繊維の末端 n をくりかえして計数し、それらの平均を \bar{y} および \bar{n} とする。すると曲線群の総延長 A の不偏推定量 \hat{A} 曲線の総数 ν の不偏推定量 $\hat{\nu}$ が、それぞれ

$$(3.6) \quad \hat{A} = \frac{\pi T}{2L} \bar{y},$$

$$(3.7) \quad \hat{\nu} = \frac{T}{A} \bar{n} \quad (A \text{ は } G \text{ 内部の面積})$$

としてえられる。したがって、平均繊維長 $\bar{L} = A/\nu$ の推定量として

$$(3.8) \quad \hat{L} = \frac{\hat{A}}{\hat{\nu}/2} = \frac{\pi A}{L} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{n}}$$

がえられる。これは比推定量だから \bar{L} の不偏推定量ではないが、シミュレーション実験 (くりかえし 10 回) により、相対誤差が 1 パーセント以内という良い結果がえられている (\hat{L} の分散は与えられていない)。

Moran (1966) は Steinhaus の提案した曲線の長さ L の推定量の分散の上限を与え、田口・岸本・伊理 (1981) はその結果をさらに理論的・実験的に検討しているが、それらはやや複雑で結果が近似的であるのが難点であろう。

したがってこの小論で提案した方法をさらに一般化して、理論的および実際的な研究が行われることを期待したい。

参 考 文 献

- 栗田 稔 (1956). 積分幾何学; 共立出版, 14-17.
- 芳賀敏郎 (1957). 積分幾何学の繊維への応用; 標準化, **10**(1), 18-24.
- Moran, P.A.P. (1966). Measuring the length of a curve; *Biometrika*, **53**, 359-364.
- 増山元三郎 (1968). 幾何学的調査法; 中山編「統計学辞典」, 1088-1093.
- 林 知己夫他 (1972). 動く対象集団に対する標本調査—VII; 統計数理研究所彙報, **20**(2), 45-60.
- 田口 東, 岸本一男, 伊理正夫 (1981). 複雑な線図形の長さを積分幾何学を用いて測定する方法に関する理論的・実験的解析; 計測自動制御学会論文集, **17**, 396-402.
- 林 知己夫, 多賀保志他 (1985). 調査とサンプリング; 同文書院, 77-98.

Generalized Buffon's Needle Problem and some Remarks
on its Application

Yasushi Taga

(Yokohama City University)

General formulas of expectation and variance of the number of intersections of a rectifiable curve with parallel lines randomly placed at intervals h are given. In addition some remarks are stated in estimating the size of animal population and the mean length of fibres.