統計数理 第34巻 第2号 (1986)

時系列解析に現われる高次代数方程式への McAuley 法の適用について

統計数理研究所　荒　畑　恵美子

(1986年8月　受付)

1. はじめに

白色雑音に埋れた信号を検出するための存否スペクトルの計算，あるいは自己回帰モデルの特性表示等時系列解析に関連して，高次代数方程式の解が要求させられる場合が多い（熊沢峰夫 (1983)).

代数方程式を解くとき，4次迄の方程式の根は古典的な公式で求められるが，一般には5次以上に対しては公式を用いて解くことは出来ない.

高次代数方程式を解くには，逐次近似による反復法を用いるが，大別すると，

1)　おおざっぱな近似解から出発出来る方法

2)　良い初期値を近似解として必要とする方法

の2種類がある．実用上は，1), 2) を併用する.

2) に属する Bairstow 法の変形で，精度の点でも収束の点でもすぐれている McAuley 法がある（山内二郎，森口繁一，一松信 (1965)). この報告では，これを時系列解析に適用したときの経験について述べる.

2. McAuley 法について

実係数方程式を

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

とする.

2次因子 (x^2+px+q) で後向きに (backward 即ち，次数の低い方から) 逐次割算をして，2つずつ近似解を求めていく方法である.

剰余の係数を R, S とし，後向きの割算をすると次のようになる.

$$b_i=(a_i-pb_{i-1}-b_{i-2})/q \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-3)$$
$$c_i=(b_i-pc_{i-1}-c_{i-2})/q \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-3)$$
$b_{-1}=b_{-2}=c_{-1}=c_{-2}=0$ とおく.
$$R=a_{n-1}-(pb_{n-2}+b_{n-3})$$
$$S=a_{n-2}-(qb_{n-2}+pb_{n-3}+b_{n-4})$$

R, S は共に p, q の関数だから $R(p,\ q)$, $S(p,\ q)$ と書ける.

$$\begin{cases} R(p,\ q)=0 \\ S(p,\ q)=0 \end{cases}$$

が同時に成立するならば，(x^2+px+q) は $f(x)$ の 2 次因子となる．よって，2 次因子 (x^2+px+q) を決定する問題は連立方程式

$$\begin{cases} R(p,\ q)=0 \\ S(p,\ q)=0 \end{cases}$$

を解くことになる．

R, S をテーラー展開して 2 次以上の項を無視すると次のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial p}\cdot \Delta p+\dfrac{\partial R}{\partial q}\cdot \Delta q=-R \\ \dfrac{\partial S}{\partial p}\cdot \Delta p+\dfrac{\partial S}{\partial q}\cdot \Delta q=-S \end{cases}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p}=-(b_{n-2}-c_{n-4})$$

$$\frac{\partial R}{\partial q}=c_{n-3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p}=-(b_{n-3}-pc_{n-4}-c_{n-5})$$

$$\frac{\partial S}{\partial q}=-(b_{n-2}-pc_{n-3}-c_{n-4})$$

これより Δp, Δq を求める．

$$\begin{cases} p^*=p+\Delta p \\ q^*=q+\Delta q \end{cases}$$

として $x^2+p^*x+q^*$ を次の試みの因子とする．Δp, Δq が十分小さくなる迄反復する．これは Newton-Raphson の反復法で，2 次の収束性を持つので適当な出発値を与えると収束は速い．以上の方法を McAuley 法という．

3. 計算上の工夫

McAuley 法をそのままの形で実際のものに適用してみると，低次のものにはうまくいくが高次のものにはうまくいかない．そこで，次に述べるような計算上の工夫をした．

3.1 2 次因子 (x^2+px+q) の係数 p と q の初期値の決め方

実係数方程式を

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0 \quad (a_n\neq 0)$$

とする．根を α_1, α_2, $\cdots$, α_n とすると，根と係数の関係から

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

となる．n 次の場合の根の重心は

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=-\frac{a_{n-1}}{n\cdot a_n}$$

となる．2 次因子の係数 p, q は 2 次方程式の根と係数の関係から，根を α, $\bar{\alpha}$ とするとき

$$x^2+px+q=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}=0$$

$$\begin{cases} p=-(\alpha+\bar{\alpha}) \\ q=\alpha\bar{\alpha} \end{cases}$$

となる．

よって，2 次の場合の根の重心は

$$\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=-\frac{p}{2}$$

となる．時系列解析のとき，AR モデルに表われる多項式の zero 点は単位円の中にある．2 次因子の初期値の重心 $\left(-\frac{p}{2}\right)$ が，全体の重心 $\left(-\frac{a_{n-1}}{n\cdot a_n}\right)$ になるようにとることは自然であろう．即ち，

$$p=\frac{2}{n}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

とする．一方，q の初期値は 2 次因子の 2 根が単位円上にあるように選ぶ．即ち，

$$q=1.0$$

とおく．

3.2 オーバーフローに対する対策

修正量 Δp, Δq を求めるとき，オーバーフローを起こすことがある．そのときは Scaling をしておく必要がある．

3.3 発散に対する対策

Δp, Δq を用いて計算すると発散してしまうことがある．それを防ぐためには次のようにする．今，

$$z(p,\ q)=|R(p,\ q)|+|S(p,\ q)|$$

と定義する．第 i 段階で，求まった Δp, Δq を各々 Δp_i, Δq_i とする．最初に，$\lambda=1$ として，以下のことを試みる．もし

$$Z(p_i+\lambda\cdot\Delta p_i,\ q_i+\lambda\cdot\Delta q_i)>Z(p_i,\ q_i)$$

ならば，λ を 1/2 にする．これが

$$Z(p_i+\lambda\cdot\Delta p_i,\ q_i+\lambda\cdot\Delta q_i)\leqq Z(p_i,\ q_i)$$

になる迄繰り返す．その結果求まった λ は λ_i として採用される．

3.4 Ill-condition のときの対策

$$D=\frac{\partial R}{\partial p}\cdot\frac{\partial S}{\partial q}-\frac{\partial R}{\partial q}\cdot\frac{\partial S}{\partial p}$$

とする．

$D=0$ に近いとき，次のような計算にスイッチする．

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial R}{\partial p} & \dfrac{\partial R}{\partial q}\\ \dfrac{\partial S}{\partial p} & \dfrac{\partial S}{\partial q}\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}\Delta p\\ \Delta q\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}R\\ S\end{pmatrix}$$

とする．

$$J\cdot\Delta=-f$$

を解く代りに，

$$(J^t\cdot J+\delta I)\cdot\Delta=-J^t\cdot f$$

を解く．即ち，

$$\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)^2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right)^2+\delta & \left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right)+\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)\\ \left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)+\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right) & \left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right)^2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\delta\end{pmatrix}\Delta$$

$$=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial R}{\partial p}\cdot R+\dfrac{\partial S}{\partial p}\cdot S\\ \dfrac{\partial R}{\partial q}\cdot R+\dfrac{\partial S}{\partial q}\cdot S\end{pmatrix}$$

ここで，δ は次のように決める．

$$\delta=10^{-6}*(J^t\cdot J \text{ の対角要素の絶対値最大のもの})$$

もしだめなときは δ を10倍していく．[$D=0$ の判定のとき，実際には丸め誤差などの影響で正確に $D=0$ となることはないので，$|D|<\eta$（適当なある正の小さな数 η に対して）かどうかで判定する．]

3.5 収束の判定

収束の判定の仕方が良くないと，反復が繰り返されて止まらなくなる．

1) 精度の限界を決めてそれに達したら止める．実際の計算は double precision でしている．
   最初 $\varepsilon=10^{-9}$ とし，もし

$$|\Delta p|\leqq\varepsilon,\quad |\Delta q|\leqq\varepsilon$$

   ならば止める．但し，収束しないときは収束判定基準となる ε を1桁ずつゆるめていく．

2) ある一定回数まわったら無条件で止める．ここでは20回としている．

実用上は，1)，2) を併用する．

4. 数値例

時系列解析の AR モデルを当てはめたとき生じる係数を，代数方程式の係数として持つ問題に McAuley 法をそのままの形で適用してみたが，20次位迄はうまくいったが高次になるとうまくいかなかった．そこで3章に述べたような計算上の工夫を行なってみた．

数値計算の本には，2次因子の factor x^2+px+q の p，q の初期値として，$p=1$，$q=1$ とし

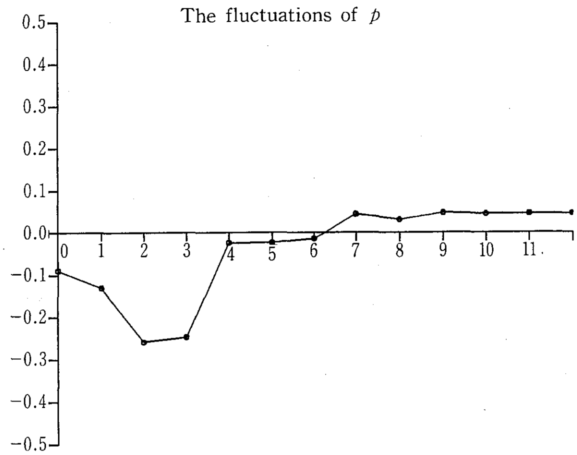

図 1.　次数が 50 のときの反復回数の変化に伴う p の動きを示す 1 つのケースである.

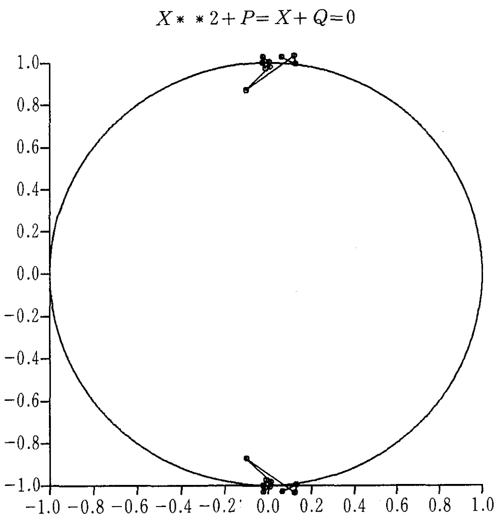

図 2.　次数が 50 のときの 2 次因子 $x^2+px+q=0$ の解の動きを示している 1 つのケースである.

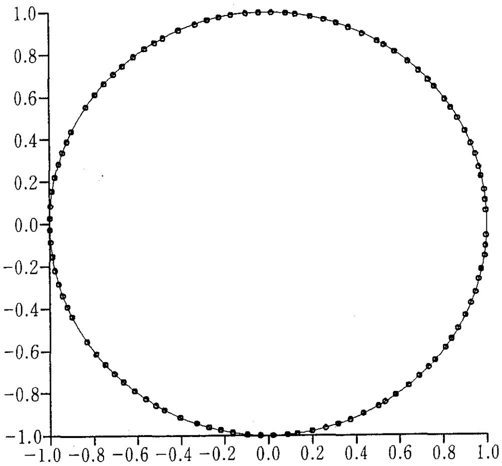

図 3.　AR モデルを当てはめたとき生じる係数を，係数に持つ代数方程式の根の分布を示している．次数が 100 のときのであり，根が単位円上にある．次数が高くなると近接根が多くなる．

てもしだめだったら $p=-1, q=1$ とするとうまくいく（山内二郎，森口繁一，一松信（1965））となっていたが，うまくいかなかった．そこで 3.1 で述べたようにしたらうまくいった．また修正量 Δp, Δq を計算するとき，計算途中で Δp, Δq の分母，分子が大きくなりオーバーフローを起こすことがある．そのときは，分母，分子にある定数(ここでは 1.0^{-10} 倍)を掛けて Scaling をした．発散に対する対策が良くないと収束が未熟な段階で止まってしまうことがあったが，3.3 で述べたようにすると収束して解が求まった．D が 0 に近いときも考慮して ill-condition に対する対策もしておいた方が良い．収束判定基準がきつ過ぎると，反復が繰り返されて止まらなくなる．そのことを避けるためにはある一定回数（ここでは 20 回）まわったら，ε を 1 桁

ずつゆるめていく．このようにして求めた結果が図1～図3に示されている．

一般に，重根や近接根があると収束が遅くなるし精度も悪くなる．このようなときに，McAuley法を用いると割合にうまくいくようである．但し，各々の問題にあうように計算上の工夫（3章で述べたような）をする必要がある．

今後の課題として，デュラン•ケルナー•アーバス法(Durand (1960), Kerner (1966), Aberth (1973)）や田辺法（田辺國士（1981), (1983a), (1983b)）等 n 個の根を同時に求めていく同時反復法と比較する必要がある．

本稿は統計数理研究所の1985年度研究発表会において発表したものを改良し，さらに詳しく述べたものであり，統計数理研究所の共同研究(61-共研-17)「存否スペクトル法の統計的特性の解析」による研究の一部である．

謝　辞

本稿を書くように勧めて下さいました赤池所長，書き方についてコメントをして下さいましたレフェリーの方，計算機使用のときお世話になりました統計データ解析センターの桂さんと松野さん，またこれを書くにあたりお世話になりました方々に心から感謝致します．

参 考 文 献

Aberth, O. (1973). Iterative Methods for Finding all Zeros of a Polynomials Simultaneously, *Mathematics of Computation,* **27**, 339-344.

Durand, E. (1960). Solutions Numeriques des Equations Algebriques Tome I: Equations du Type $F(x)=0$; Racines d'un Polynome, Masson, Paris.

Kerner, I.O. (1966). Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, *Numerische Mathematik,* **8**, 290-294

熊沢峰夫他（1983）．存否スペクトル法——原理と特長，地震学会講演予稿集．

田辺國士（1981）．非線型最小二乗法のアルゴリズム，応用統計学，**9**, No. 3, 119-140.

田辺國士（1983a）．代数方程式の全根同時解法の新しいアルゴリズム，日本数学会応用数学分科会講演アブストラクト，131-134.

田辺國士（1983b）．代数方程式の全根同時解法の重根における挙動，数値解析研究会資料4，1-6.

山内二郎，森口繁一，一松　信共著（1965）．電子計算機のための数値計算法I，培風館，東京．

On the Application of the McAuley Method to the Solution of Characteristic Equations Arising in Time Series Analysis

Emiko Arahata
(The Institute of Statistical Mathematics)

In this paper, the McAuley method is applied to the solution of characteristic equations which arise in time series analysis. However, when the degree of the equations is high, difficulties often emerge during numerical computation. But most of these difficulties can be overcome by using several computational techniques presented in this article. The following topics are discussed in detail;

1. How to determine the initial values of the coefficients p and q of the quadratic factor x^2+px+q.
2. How to prevent exponent overflow of floating point numbers.
3. How to obtain convergence.
4. How to deal with ill-conditioning.
5. How to choose a satisfactory criterion for the test of convergence.

Numerical examples are also shown.