の評価である．考える分布 F のクラスはなるべく広く取りたいが，むやみに広げてしまっては意味のある議論は殆どできなくなってしまう．ある程度の制限はどうしても必要である．この研究では F のクラスを正規分布の scale mixture に限定する．X が $N(0, 1)$ に従う確率変数，σ が X と独立で正の値をとる変数のとき積 $\eta=\sigma X$ がこの分布に従う．

$$G_k(x)=\Phi(x)-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2^j j!}\alpha_j H_{2j-1}(x)\cdot\phi(x)$$
$$\alpha_j=E(\sigma^2-1)^j,\ j=1, 2, \cdots, k$$

と置くと，次の不等式が得られる．

$$|F(x)-G_k(x)|\leqq\frac{1}{2k\pi}E(\sigma^2\vee\sigma^{-2}-1)^k$$

H はエルミート多項式である．

例（t-**分布**）：χ_n^2 は X と独立に自由度 n のカイ2乗分布に従うとする．

$\sigma=\sqrt{(n-2)/\chi_n^2}\cdot X$, $q=n/2-1$ と置くと $\sqrt{(q+1)/q}\cdot\sigma X$ が自由度 n の t-分布に従う．$\eta=\sigma X$ の分布 F について，

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=1/(q-1),\ \alpha_3=4/(q-1)(q-2),\ \alpha_4=3(q+6)/(q-1)(q-2)(q-3), \cdots$$
$$|F(x)-\Phi(x)|\leqq\frac{1}{4\pi}E(\sigma^2\vee\sigma^{-2}-1)^2\leqq\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{q-1}+\frac{q+2}{q^2}\right)$$

が成り立つ．

上の不等式は次のように強化される：任意のボレル集合 A に対して

$$|\Pr\{\eta\epsilon A\}-\int_A dG_k(x)|\leqq C_k\cdot E\ (\sigma^2\vee\sigma^{-2}-1)^k$$

この形の評価式は多次元の場合への拡張のためにはどうしても必要である．

多変量非正規モデルにおける推定量の評価

小 西 貞 則

0．はじめに

多変量データの分析は，観測データを用いて分析手法の必要とする推定値を求めることによって実行できる．しかし限られたデータに基づいて母集団全体の動向を摑もうとするのであるから，点としての推定値を求めるだけでなく偏り，分散を考慮に入れてその信頼性を評価しておく必要がある．これによって解釈の信頼性の程度を把握できることにもなる．ここでは多変量解析において基本的な固有値，固有ベクトルの推定を念頭に，母集団分布を特定することなく，推定量の分布関数を推定する方法および区間推定の方法について考察する．

1．推定量の分布関数の推定

未知の P 変量確率分布 $F(x)$ をもつ母集団からの n 個の標本に基づく統計量を $T_n=T_n(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n: F)$ とし，パラメータ $\theta(F)$ に対して，$\sqrt{n}\{T_n-\theta(F)\}$ の分布は $n\to\infty$ の時，平均0の正規分布へ収束するものとする．目的は分布関数

$$D_n(F)=\Pr\ [\sqrt{n}\{T_n-\theta(F)\}<x]$$

の推定である．いま $\sqrt{n}\ \{T_n-\theta(F)\}$ の偏りを $(b_n/\sqrt{n})$, 分散を (v_n^2), 3次のキュムラントを $(\kappa_n/\sqrt{n})$

とおく．これらは観測データにもとづいて例えばJackknife法, Bootstrap法などの方法を用いて推定されるものとする．

このとき $D_n(F)$ の Edgeworth 展開より

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad D_n(F) &= \Pr\left[\sqrt{n}\{T_n-\theta(F)\}<x\right] \\
&= \Phi\left(\frac{x}{v_n}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{b_n}{v_n}+\frac{1}{6}\frac{\kappa_n}{v_n^3}\left\{\left(\frac{x}{v_n}\right)^2-1\right\}\right]\phi\left(\frac{x}{v_n}\right)+O(n^{-1})
\end{aligned}
$$

がえられる．もちろん右辺の式は未知のパラメータに依存しないことから $\theta(F)$ の区間推定は可能であるが，近似精度の点で難がありその改良を試みる．

2. 推定量の変換

これは相関係数に対する Fisher の Z 変換に発し，統計量の変換をパラメトリックな立場から考察した Konishi (1981, 1984), Niki and Konishi (1985) の方法をノンパラメトリックな場合に適用しようとするもので，(1.1) における $1/\sqrt{n}$ の項を変換によって消去し極限分布への収束速度の改善を試みるものである．

この変換は一般に次のようになる．

$$
(2.1)\qquad \Pr\left[\left\{(1+T_n-\theta)^h-1-\frac{h}{n}\left(b_n-\frac{\kappa_n}{6v_n^2}\right)\right\}<x\right]=\Phi(\sqrt{n}x/hv_n)+O(n^{-1}).
$$

ここに $h=1-\kappa_n/(3v_n^4)$ とする．推定の偏りが比較的大きくなると予想される固有値等の推定量に対しては，

$$
(2.2)\qquad \Pr\left[\left\{e^{(h-1)(T_n-\theta)}-1+\frac{1-h}{n}\left(b_n-\frac{(1-h)v_n^2}{2}\right)\right\}<x\right]=\Phi\ (\sqrt{n}x/(h-1)v_n)+O(n^{-1}).
$$

が有効と思われる．

これによって，母集団分布を特定することなく観測されたデータにもとづいて $\theta(F)$ の区間推定が可能となる．

可微分統計量の漸近分布について

安　芸　重　雄

F_n を経験分布関数とし，$T[F_n]$ を可微分統計量とする．このとき或る正整数 m と m 変数関数 g が存在して $n^{m/2}(T[F_n]-T[F])$ の極限分布と

$$
V_n=\overbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}^{m} g(s_1,\cdots,s_m)\prod_{i=1}^{m}d\beta_n(s_i)
$$

の極限分布が等しいことが知られている．ここで $\beta_n(t)=\sqrt{n}\,(\Gamma_n(t)-t)$, Γ_n は $(0,1)$ 上の一様分布の大きさ n の random sample から得られる経験分布関数である (Filippova [3] 参照)．

$\beta_n(t)$ のマルチンゲール項は

$$
W_n(t)=\sqrt{n}\ \left(\Gamma_n(t)-\int_0^t\frac{1-\Gamma_n(u)}{1-u}\,du\right)
$$

と書けて以下のような結果が成り立つ．

定理 1. 任意の $g\in C([0,1]^m)$ に対して $h\in C([0,1]^m)$ が存在して，