

物理における確率過程*

統計数理研究所・早稲田大学理工学部 並 木 美 喜 雄

(1986年8月 受付)

1. 確率過程としての物理現象

物理現象の中には、確率過程と見なせるものが多い。確率過程は通常、平均的行動とそのまわりの“ゆらぎ”からなるが、“ゆらぎ”にはその系の特性が反映する。中性子束の“ゆらぎ”から原子炉の動作特性を測定したり、熱雑音から電気回路のインピーダンスを求めるなど、広く利用されている。本稿では、物理現象を確率過程としてとらえる手法について解説する。

物理における確率過程の典型的な例として、ブラウン運動を考えよう。よく知られているように、これは液体中の微粒子が、熱運動している液体分子と衝突することによって行うランダムな運動のことである。微粒子の質量を M 、 i 番目の液体分子が微粒子に衝突することによって及ぼす力を F_i 、液体分子の総数を N 、微粒子の位置を $\mathbf{r}(t)$ 、 t を時間とすると、ニュートンの運動方程式は、

$$(1.1) \quad M \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

となる。微粒子の軌跡 $\mathbf{r}(t)$ を精密に求めるには (1.1) を解かなければならない。いま、(1.1)

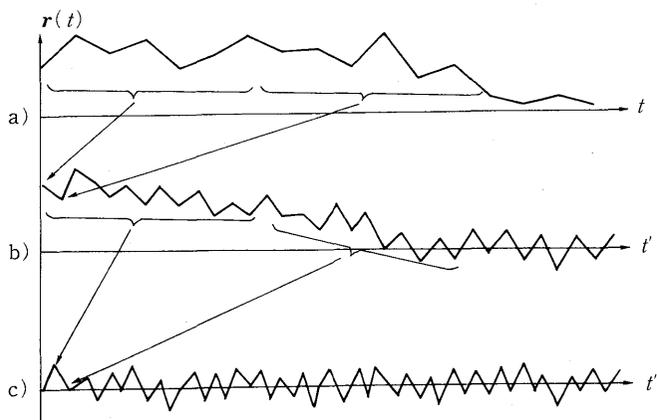


図 1.1 ミクロ-マクロの時間尺度

- a) ミクロな時間尺度
- b) マクロな時間尺度 (O-U 過程)
- c) b よりマクロな時間尺度 (ウィーナー過程)

* 本稿は統計数理研究所に於ける講義に基づいている。

を解くことができたとする、例えば図 1.1a) のような時間発展のグラフが得られるであろう。

しかし、実際問題として N は非常に大きい (1 モルの液体では $N \sim 10^{24}$) ので、(1.1) を解くことはほとんど不可能である。しかし、このように各液体分子との衝突を 1 つ 1 つ細かく見ること (ミクロな時間尺度上での観察) は、実はあまり重要ではない。なぜならば、私達は衝突と衝突の間の時間間隔よりも充分長い時間尺度を使って微粒子の運動を見ることが多いからである (マクロな時間尺度上での観察)。このようなマクロな時間尺度で見ると、微粒子の時間発展は、図 1.1b) のようになるであろう。すなわち、微粒子の運動は規則性をもった平均的行動と、そのまわりの "ゆらぎ" に分解できる。このことを運動方程式で表すには、力 F を規則的部分 K とランダム力 ξ に分けて、

$$(1.2) \quad M \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = K + \xi$$

と書けばよい。(1.1) における F は周囲の液体分子多数から受ける力であった。これに対して (1.2) の K は微粒子 1 個だけの力学変数に依存する力であり、 ξ はある統計的性質をもったランダム強制力であって、各液体分子の力学変数は完全に消されている。これはミクロからマクロへの時間尺度の変更、すなわち粗視化によって可能になったのである。多くの場合、 K は速度に比例したまさつ力

$$(1.3) \quad K = -f \frac{dr}{dt} \quad (f: \text{まさつ定数})$$

を重要な部分として持つ。この他に外力などが加わる。(1.2) のように、ランダム力をもつ運動方程式をランジュバン方程式といい、(1.2) が記述する確率過程を O-U 過程 (Ornstein-Uhlenbeck process) と呼ぶ。

さて、図 1.1b) よりもさらに粗い時間尺度で同じ運動を見たらどうなるか。充分長い時間尺度で見ると、微粒子の速度の変化 (加速度) は見えなくなり (図 1.1c) 参照)、(1.2) の左辺は無視できて、ランジュバン方程式は、 K が (1.3) の場合

$$(1.4) \quad f \frac{dr}{dt} = \xi$$

となる。このような確率過程をウィーナー過程 (Wiener process) と呼ぶ。

ここで微粒子と液体分子との衝突を力学的に扱って、微粒子に対するランジュバン方程式を導出してみよう。予備知識としては、「高校物理」だけで充分である。

一次元のブラウン運動を考える。ブラウン運動をする微粒子の質量を M とし、まわりに質量 m をもつ多数の液体分子が線密度 n で分布しているとする。微粒子が初めに速度 v で右向きに動いていたとし、まわりの分子は左方向には速度 $-u_+$ 、右方向には速度 u_- で動いていたとする。微粒子が左方向に動いている液体分子のひとつと正面衝突をして、図 1.2 のように両者の速度がそれぞれ v' 、 u' になったとしよう。衝突が弾性衝突だったとすれば、 v 、 u_+ 、 v' 、 u' について



図 1.2 微粒子と分子の衝突

$$(1.5a) \quad \text{運動量保存: } Mv + (-mu_+) = Mv' + mu'$$

$$(1.5b) \quad \text{弾性衝突: } v - (-u_+) = -(v' - u')$$

という式が成立するので、これより

$$(1.6) \quad u' = \frac{2M}{M+m}v + \frac{M-m}{M+m}u_+$$

を得る。従って、正面衝突を1回することにより1個の分子が微粒子に与える運動量 Δp は、

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Delta p &= -(mu' - (-mu_+)) \\ &= -\frac{2mM}{m+M}(v+u_+) \end{aligned}$$

である。分子は線密度 n で分布しているので粒子は単位時間当り $(v - (-u_+)) \times n$ 回正面衝突をすることになり、これによって受ける力 F_1 は

$$(1.8) \quad \begin{aligned} F_1 &= \Delta p(v - (-u_+))n \\ &= -n(2mM)(m+M)^{-1}(v+u_+)^2 \end{aligned}$$

で与えられる。同様にして右方向に動いている分子の後追い衝突によって受ける力は、

$$(1.9) \quad F_2 = n(2mM)(m+M)^{-1}(v-u_-)^2$$

となる。したがって、微粒子が周囲の液体分子から受ける力は全部で

$$(1.10) \quad \begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ &= -n \cdot (2mM)(M+m)^{-1}2(u_+ + u_-)v \\ &\quad - n \cdot (2mM)(M+m)^{-1}(u_+^2 - u_-^2) \end{aligned}$$

である。 $M \gg m$ と仮定し、 $u_+ + u_- \approx 2\bar{u}$ (\bar{u} は u_{\pm} の平均値) とおいて、

$$(1.11) \quad F \approx -8nm\bar{u}v - 4nm(u_+ - u_-)\bar{u}$$

を得る。いま、微粒子の運動の記述に関しては、マイクロ時間尺度からマクロ時間尺度に移行する中間段階にいる。すでに平均操作を導入したので、マイクロ時間尺度から離れたが、液体分子の熱運動の特性を取り入れて、この移行を完成させなければならない。分子の線密度 n が充分大きい場合、衝突と衝突の間の平均時間間隔 t_0 が極めて小さくなるので、私達は必然的にマクロな時間尺度で観察することになる。この場合、液体分子の速度を温度で表す統計法則によって扱う方がよい。

液体分子の右向き velocity の平均と左向き velocity の平均は等しいはずだから、 $\langle \dots \rangle$ を平均を表わす記号とすれば、

$$(1.12) \quad \langle u_+ \rangle = \langle u_- \rangle = \bar{u}$$

のはずである。すなわち、 \bar{u} は液体分子の平均の速度である。したがって

$$(1.13) \quad \langle u_+ - u_- \rangle = 0$$

となる。この性質を使って F の内容をしらべる。

さて、(1.11) において

$$(1.14) \quad \begin{aligned} f &= 8nm\bar{u} \\ \xi &= -4nm(u_+ - u_-)\bar{u} \end{aligned}$$

とおこう。すなわち

$$(1.15) \quad F = -fv + \xi$$

ここで、 ξ の統計的性質を調べる。まず、

$$(1.16) \quad \langle \xi \rangle = -4nm\bar{u} \langle u_+ - u_- \rangle = 0$$

が成立する。次に $\langle \xi^2 \rangle$ について考える。液体分子の平均間隔を l_0 とすれば、線密度は $n=1/l_0$ であり、衝突と衝突の間の平均時間間隔は $t_0=l_0/\bar{u}$ である。 $\langle \xi^2 \rangle$ にエネルギー等分配の法則 $\langle (u_+ - u_-)^2 \rangle = kT/m$ (k はボルツマン定数、 T は絶対温度) を導入すれば直ちに

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \langle \xi^2 \rangle &= (16nm\bar{u})nm \langle (u_+ - u_-)^2 \rangle \bar{u} \\ &= 2fkT/t_0 \end{aligned}$$

が得られる。

以上の経過を辿ってマイクロからマクロへ時間尺度変換を行ない (1.14) ~ (1.17) を得た。これは、微粒子と液体分子との衝突の力学と液体分子の熱運動の統計法則をもとにして、微粒子の時間発展を記述するランジュバン方程式

$$(1.18) \quad \begin{aligned} M \frac{dv(t)}{dt} &= -fv(t) + \xi(t) \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned}$$

を導出したことを意味する。 $x(t)$ は微粒子の位置座標、 $v(t)$ はその速度であった。ここで、まざつ係数 f は (1.14) で与えられ、ランダム力 ξ は (1.16), (1.17) のような統計的性質をもつ。(1.17) は散逸定数とランダム力の関係を与えるナイキストの定理 (揺動散逸定理) としてよく知られている。ランジュバン方程式とナイキストの定理がこのような初歩的な考察から導けたことに注意してほしい。荒筋だけであるが、本質はこれで十分理解できよう。次節では、このナイキストの定理と確率過程の定式化について述べる。

2. ナイキストの定理

一般にブラウン運動をしている微粒子の位置のようなランダムな時間変化を確率過程という。確率過程はランジュバン方程式によって記述され、それはランダム力の項 $\xi(t)$ を含んでいる。このランダム力の統計的性質をナイキストの定理によって定式化していこう。

ランジュバン方程式

$$(2.1) \quad M \frac{dv(t)}{dt} = -fv(t) + \xi(t)$$

において、ランダム力 ξ は通常、平均値 $\langle \xi \rangle = 0$ とそのまわりの2乗平均 $\langle \xi^2 \rangle (\neq 0)$ をもつガウス型の確率分布

$$(2.2) \quad W_\xi(z) = (2\pi \langle \xi^2 \rangle)^{-\frac{1}{2}} \exp[-z^2/2\langle \xi^2 \rangle]$$

に従う。時間的な相関は、多くの場合、

$$(2.3) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \langle \xi^2 \rangle \exp[-|t-t'|/\tau_0]$$

という形をとる。右辺が $|t-t'|$ のみの関数となっているのは、 $\xi(t)$ が定常過程であることを現している。 τ_0 はマイクロな緩和時間である。時間的相関が持続するのは τ_0 程度の時間であるから、 τ_0 を無視できるようなマクロ的時間尺度上では $\exp[-|t-t'|/\tau_0] \approx 2\tau_0\delta(t-t')$ とおくこ

とができる。また、 f と $\langle \xi^2 \rangle$ の間には、ナイキストの定理

$$(2.4) \quad 2\tau_0 \langle \xi^2 \rangle = 2fkT$$

が成立する（前節の (1.17) においては、 τ_0 が平均衝突時間間隔 t_0 になっていた、(2.4) の方が一般的である）。従って、ランダム力 ξ の統計的性質は、まとめると、

$$(2.5a) \quad \langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$(2.5b) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2fkT\delta(t-t')$$

となる。(2.5b) をナイキストの定理と言うこともある。(2.5b) が成立する場合、時間相関がないので、 $\xi(t)$ によって生じられる確率過程はマルコフ過程である。

ナイキストの定理 (2.5b) の意味をフーリエ変換を用いて調べてみよう。 $v(t)$, $\xi(t)$ を

$$(2.6a) \quad v(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \tilde{v}(\omega) d\omega$$

$$(2.6b) \quad \xi(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \tilde{\xi}(\omega) d\omega$$

のようにフーリエ分解すると、(2.1), (2.5) はフーリエ成分 $\tilde{v}(\omega)$, $\tilde{\xi}(\omega)$ に対する方程式

$$(2.7) \quad (-i\omega M + f)\tilde{v}(\omega) = \tilde{\xi}(\omega)$$

$$(2.8a) \quad \langle \tilde{\xi}(\omega) \rangle = 0$$

$$(2.8b) \quad \langle \tilde{\xi}(\omega)\tilde{\xi}(\omega') \rangle = 2fkT\delta(\omega + \omega')$$

に移行する。また、 $v(t)$ は速度であるから、実数条件

$$(2.9) \quad \tilde{v}^*(\omega) = \tilde{v}(-\omega)$$

が成立する。 $\tilde{\xi}(\omega)$ についても同様。ゆえに、(2.8b) は

$$(2.10) \quad \langle \tilde{\xi}(\omega)\tilde{\xi}^*(\omega') \rangle = 2fkT\delta(\omega - \omega')$$

と書くこともできる。これがナイキストの定理のフーリエ表示である。

いま、「インピーダンス」を

$$(2.11) \quad Z(\omega) = (-i\omega M + f)^{-1}$$

によって定義すると、ランジュバン方程式 (2.7) は

$$(2.12) \quad \tilde{v}(\omega) = Z(\omega)\tilde{\xi}(\omega)$$

と書ける。この式は、「ランダム力 $\tilde{\xi}(\omega)$ によって速度 $\tilde{v}(\omega)$ が生じた」と読むことができる。また、(2.10) と (2.12) より、 $\tilde{v}(\omega)$ に対するナイキストの定理

$$(2.13) \quad \langle \tilde{v}(\omega)\tilde{v}^*(\omega') \rangle = 2kT[\operatorname{Re} Z(\omega)]\delta(\omega - \omega')$$

を得る。ここでは、インピーダンスの実部がデルタ関数の係数として右辺に現われている。

ところで、インピーダンスというのは元來電気回路の言葉である。しかし、かなり一般的な概念であって、力学の問題に適用することもできる。ときには、力学の問題を等価回路の言葉で語る方が便利なこともある。そこで、当分の間、回路の言葉で話を進めていくことにしよう。

図 2.1 のような回路を考える。端子間に電圧 $v(t)$ を与えると、それによって電流 $j(t)$ が流れる。この場合、キルヒホッフの法則

$$(2.14a) \quad j(t) = Y(D_t)v(t)$$

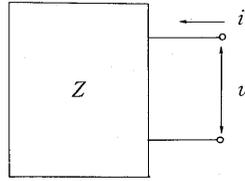


図2.1 2端子回路

が成立する。 $Y(D_t)$ は回路の構造によって決まる時間についての微分演算子で、(そのフーリエ成分が)アドミッタンスと呼ばれる。 v を印加したときの応答 j を与えるのがアドミッタンスである。逆の見方として、電流 $j(t)$ が流れるような電位差 $v(t)$ を求める問題、すなわち j に対する応答 v を求める問題の解は

$$(2.14b) \quad v(t) = Z(D_t)j(t)$$

であり、 $Z(D_t)$ (のフーリエ成分)をインピーダンスという。 $Y(D_t)$ とは

$$(2.15) \quad Z(D_t) = Y^{-1}(D_t)$$

という関係にある。

さて、電圧 $v(t)$ と電流 $j(t)$ の積は、単位時間当りのエネルギー損失を与える。

$$(2.16) \quad \frac{dW(t)}{dt} = v(t)j(t)$$

(2.14)を満足するような変数の組はいろいろあるが、その中で(2.16)を満足するような組のことを熱力学的状態変数と呼ぶ。 $v(t)$ と $j(t)$ は熱力学的状態変数であり、(2.14 a)の見方をしたとき、 $v(t)$ を熱力学的駆動力、 $j(t)$ を熱力学的流れということがある。

さて、回路が温度 T の熱溜の中にあつて熱平衡状態にあるとしよう。このとき、端子間に外部から電圧をかけなくても、回路の抵抗を作っている物質内の荷電粒子のランダムな運動により、平均値ゼロの雑音電流 $j(t)$ が流れ、それによって端子間にはやはり平均値ゼロの雑音電圧 $v(t)$ が生じる。このような回路のナイキスト定理について考えて見よう。回路は定常状態にあるから、電流や電圧の相関関数は時刻の差 $\tau = t - t'$ のみの関数である。それぞれを

$$(2.17a) \quad \varphi_v(\tau) = \langle v(t)v(t') \rangle$$

$$(2.17b) \quad \varphi_j(\tau) = \langle j(t)j(t') \rangle$$

と書けば、 $\varphi_v(\tau)$ と $\varphi_j(\tau)$ は τ の偶関数である。これらのフーリエ表示をとれば、以前と同様に

$$(2.18a) \quad \langle \tilde{v}(\omega)\tilde{v}^*(\omega') \rangle = \pi G_v(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

$$(2.18b) \quad \langle \tilde{j}(\omega)\tilde{j}^*(\omega') \rangle = \pi G_j(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

と書ける。ここで、 $G_v(\omega)$ と $G_j(\omega)$ は、この式で定義される ω の偶関数であつて、各々電圧と電流の単位電力スペクトルという。この名称の由来は次式から明らかであろう。

$$\begin{aligned} \langle v(t)^2 \rangle &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \exp(i\omega t) \\ &\quad \cdot \exp(-i\omega' t) \cdot \pi G_v(\omega)\delta(\omega - \omega') \\ &= \int_0^{\infty} d\omega G_v(\omega) \\ \langle j(t)^2 \rangle &= \int_0^{\infty} d\omega G_j(\omega) \end{aligned}$$

G_v と G_j を使って v と j に対するナイキストの定理を書けば

$$(2.19a) \quad G_v(\omega) = 2\pi^{-1}kT(\operatorname{Re} Z(\omega))$$

$$(2.19b) \quad G_j(\omega) = 2\pi^{-1}kT(\operatorname{Re} Y(\omega))$$

となる。この式は、定常雑音のスペクトルが回路のインピーダンスにより完全に決定されているということを示している。雑音起電力の白いスペクトルが回路によってフィルターされたものが v または j のスペクトルなのである。

3. 回路のインピーダンスと定常雑音

前節で述べたように、回路のインピーダンスと定常雑音には極めて密接な関係がある。3 節では、この関係を用いてインピーダンスを測定する方法の一般論と具体例を述べる。

前節で (2.18) を導き出した方法と同様の計算を行なうことにより、相関関数 $\varphi_v(\tau)$ と単位電力スペクトル $G_v(\omega)$ の間の関係式

$$(3.1) \quad \varphi_v(t) = \int_0^\infty G_v(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

を得る。これにナイキストの定理 (2.19) を代入すると、

$$(3.2) \quad \varphi_v(\tau) = 2\pi^{-1}kT \int_0^\infty \operatorname{Re} Z(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

となる。ここで、インピーダンスの実数性条件

$$(3.3) \quad Z^*(\omega) = Z(-\omega)$$

は $\operatorname{Re} Z(\omega)$ が ω の偶関数、 $\operatorname{Im} Z(\omega)$ が ω の奇関数であることを意味するから、(3.2) を

$$(3.4) \quad \varphi_v(\tau) = \pi^{-1}kT \int_{-\infty}^\infty Z(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

と変形できる。さらに、受動回路の因果律 (後で説明する)

$$(3.5) \quad \int_{-\infty}^\infty Z(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = 0 \quad (\tau > 0)$$

を用いると、

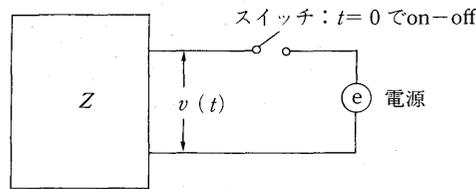
$$(3.6) \quad \varphi_v(\tau) = (2\pi)^{-1}kT \int_{-\infty}^\infty Z(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

が得られる。(3.6) は相関関数とインピーダンスがそれぞれお互いのフーリエ変換になっていることを示している。(3.6) の逆変換は

$$(3.7) \quad Z(\omega) = (kT)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \varphi_v(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$$

である。同様な式が雑音電流 $j(t)$ の相関関数 φ_j とアドミッタンスについても成立する。

我々が到達した (3.7) はナイキストの定理 (2.19) の言い換えにすぎない。しかし「雑音電圧 $v(t)$ の相関関数 $\varphi_v(\tau)$ をフーリエ変換することにより回路のインピーダンスが求まる」という重要な事実を教えてくれる。ふつう、回路のインピーダンスというのは、その回路を構成している抵抗、コンデンサー、コイルなどの素子の組合せを与えて求められるものである。しかし、回路が絶対に開けられない箱の中に入っている場合、それらの組合せを見るわけにはいか

図 3.1 受動回路の因果律: $v(t)=0 (t<0)$

ない。そんなときでも、回路の雑音電圧（電流）を測定すれば、インピーダンスがわかるというのである。同様な手法は原子炉の動作特性の測定に広く用いられている。作動中の原子炉は、まさに絶対に開けるわけにはいかない箱であるが、その動作特性は中性子束のゆらぎを測定することによって知ることができる。

ここで、少し寄り道をして(3.5)が受動回路の因果律を表わすことを説明しておこう。図 3.1 の回路で、時刻 $t=0$ でスイッチを瞬間的にオン-オフさせたとする。すると回路に一瞬電流が流れる。デルタ関数型の電流である。このとき、デルタ関数 $\delta(t)$ のフーリエ表示が $\tilde{\delta}(\omega)=1$ であることと、電流と電圧の関係

$$(3.8) \quad \tilde{v}(\omega) = Z(\omega) \tilde{j}(\omega)$$

より、 $v(t)$ は

$$(3.9) \quad v(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) Z(\omega) d\omega$$

と表される。一方、時刻 $t=0$ でスイッチをオン-オフさせたのだから、 $t<0$ では回路に電圧は生じていないはずである(因果律)。すなわち

$$(3.10) \quad v(t) = 0 \quad (t < 0)$$

である。(3.9) と (3.10) より

$$(3.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) Z(\omega) d\omega = 0 \quad (t < 0)$$

を得る。(3.11) で t を $-\tau$ におきかえると ($\tau > 0$)、(3.5) を得る。

話をもとに戻して (3.7) からインピーダンスを求める具体例を示そう。図 3.2 のように、抵抗 R と誘導係数 L の直列回路の端子に電圧計をつなぎ、雑音電圧を測定する。

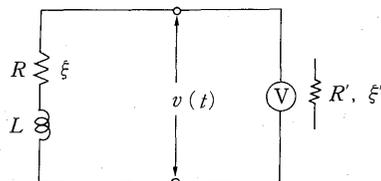


図 3.2 R-L 直列回路の雑音電圧

我々の目的は、この雑音電圧からインピーダンスを求めることである。電圧計の内部抵抗を R' 、雑音起電力を ξ' とすると、回路方程式は、

$$(3.12) \quad L \frac{dj(t)}{dt} + (R + R')j(t) = \xi(t) + \xi'(t)$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \xi'(t) \rangle = 0 \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2RkT\delta(t-t') \\ \langle \xi'(t)\xi'(t') \rangle &= 2R'kT\delta(t-t') \\ \langle \xi(t)\xi'(t') \rangle &= 0 \end{aligned}$$

となる。抵抗 R' を流れる電流 $j(t)$ は、(3.12) のような「ランジュバン方程式」を満足するわけである。(2.12)との対応は $L \rightleftharpoons M$, $R(\text{又は } R') \rightleftharpoons f$, $v(t) \rightleftharpoons j(t)$ である。(3.12)を解くと、定常状態の解として

$$(3.14) \quad j(t) = L^{-1} \int_0^\infty \exp[-(R + R')\tau/L] \cdot \{\xi(t - \tau) + \xi'(t - \tau)\} d\tau$$

を得る。一方、端子電圧 $v(t)$ は図 3.2 より

$$(3.15) \quad v(t) = -R'j(t) + \xi'(t)$$

だから、(3.13) と (3.14) より

$$(3.16) \quad \varphi_v(\tau) = \langle v(t)v(t+\tau) \rangle = R'kT[2\delta(\tau) - R'L^{-1} \exp(-(R + R')\tau/L)]$$

となる。これを (3.7) に代入すると、

$$(3.17) \quad Z(\omega) = R' \frac{R - i\omega L}{R + R' - i\omega L} \xrightarrow{R' \rightarrow \infty} R - i\omega L$$

を得る。これは確かに回路のインピーダンスである。 $R' \rightarrow \infty$ としたのは、電圧計の内部抵抗が非常に大きいという理想的な場合を想定してのことである。このように、雑音電圧の相関関数から、回路のインピーダンスを求めることができる。

4. 非定常状態の記述

回路が一定温度 T の大きな熱溜の中におかれているとする。このとき、回路に含まれる抵抗 R には雑音起電力 $\xi(t)$ が生じるが、それは次のような統計的性格を持っている。

$$(4.1a) \quad \langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$(4.1b) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \gamma\delta(t-t')$$

$$(4.1c) \quad \gamma = 2RkT$$

今、何らかの原因で回路の平衡が乱されたとしよう。このとき $\xi(t)$ が引き起す雑音電流 $j(t)$ は

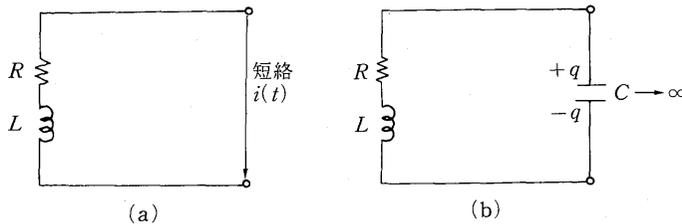


図 4.1 R-L直列回路

非定常な変化をする。回路は非定常状態になるわけである。しかし、この乱れは回路特有の緩和時間の中に静まって、回路の平衡が回復する。この節ではそのような非定常な変化について調べてみよう。

まず、図 4.1(a) のような抵抗 R と誘導係数 L の直列回路を考える。端子を短絡したとき流れる電流 $j(t)$ の時間変化は、回路のランジュバン方程式、

$$(4.2) \quad L \frac{dj(t)}{dt} + Rj(t) = \xi(t)$$

で与えられる。これを初期条件

$$(4.3a) \quad j(0) = j_0$$

のもとで解くと

$$(4.3b) \quad j(t) = j_0 \exp(-\beta t) + L^{-1} \exp(-\beta t) \int_0^t \exp(\beta t') \xi(t') dt'$$

を得る。ただし、 $\beta = RL^{-1}$ である。 β^{-1} は回路の「時定数」と呼ばれる。(4.3b) からわかるように、回路が非定常状態から定常状態に移行するのに要する緩和時間はだいたい β^{-1} ぐらいである。(4.1) と (4.3b) より、 $j(t)$ の統計的性格は

$$(4.4a) \quad \langle j(t) \rangle = j_0 \exp(-\beta t)$$

$$(4.4b) \quad \langle j(t)j(t+\tau) \rangle = \langle j(t)^2 \rangle \exp(-\beta|\tau|)$$

$$(4.4c) \quad \langle j(t)^2 \rangle = j_0^2 \exp(-2\beta t) + \gamma(2L^2\beta)^{-1}[1 - \exp(-2\beta t)]$$

となる。ここで、 τ を一定に保ったまま長時間極限 $t \rightarrow \infty$ をとると、定常状態の式

$$(4.5a) \quad \langle j(t) \rangle = 0$$

$$(4.5b) \quad \langle j(t)j(t+\tau) \rangle = \gamma(2L^2\beta)^{-1} \exp(-\beta|\tau|)$$

を得る。

さて、この回路を途中で切って容量 C を持ったコンデンサーを挿入してみる(図 4.1(b) 参照)。このコンデンサーに貯えられる電荷 $q(t)$ は $j(t)$ と

$$(4.6) \quad j(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

という関係にある。(4.3b) の $j(t)$ との関係は、 $R-C$ 回路のランジュバン方程式

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = \xi(t)$$

において、 $C \rightarrow \infty$ とし、(4.6) を代入することによって得られる。すなわち、図 4.1(b) の回路のランジュバン方程式は (4.2)、あるいは $q(t)$ を使って

$$(4.7) \quad L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} = \xi(t)$$

のように書ける。これを初期条件

$$(4.8) \quad q(0) = q_0$$

のもとで解くと、初期値からのずれ

$$(4.9) \quad Q(t) = q(t) - q_0$$

は,

$$(4.10) \quad Q(t) = j_0 \beta^{-1} [1 - \exp(-\beta t)] \\ + (L\beta)^{-1} \int_0^t [1 - \exp(\beta(t'-t))] \xi(t') dt'$$

であることがわかる。簡単な計算によって

$$(4.11a) \quad \langle Q(t) \rangle = j_0 \beta^{-1} [1 - \exp(-\beta t)]$$

$$(4.11b) \quad \langle Q(t)Q(t+\tau) \rangle = (j_0 \beta^{-1})^2 [1 - \exp(-\beta t)] \\ \times [1 - \exp(-\beta(t+\tau))] + \gamma L^{-2} \beta^{-2} t \\ + \gamma (2L^2 \beta^3)^{-1} [-2 + 2 \exp(-\beta t) \\ - \exp(-\beta \tau) - \exp(-\beta \tau) \{\exp(-2\beta t) \\ - 2 \exp(-\beta t)\}]$$

$$(4.11c) \quad \langle Q^2(t) \rangle = (j_0 \beta^{-1})^2 [1 - \exp(-\beta t)]^2 + \gamma L^{-2} \beta^{-2} t \\ + \gamma (2L^2 \beta^3)^{-1} [-3 + 4 \exp(-\beta t) - \exp(-2\beta t)]$$

を得る。ここで $\beta t \gg 1$, つまり回路の時定数 β^{-1} に比べて充分時間 t が大きくなれば,

$$(4.12) \quad \langle Q(t)^2 \rangle \doteq \gamma L^{-2} \beta^{-2} t$$

となる。時間間隔 t についての平均電流を $I(t)$ とすると,

$$(4.13) \quad I(t) = t^{-1} \int_0^t j(t') dt' = t^{-1} Q(t)$$

であるから, この自乗平均は,

$$(4.14) \quad \langle I(t)^2 \rangle \doteq t^{-1} \langle Q(t)^2 \rangle = \gamma L^{-2} \beta^{-2} t^{-1} \quad (\beta t \gg 1)$$

である。よって (4.12) と (4.13) より,

$$(4.15) \quad \langle Q(t)^2 \rangle \langle I(t)^2 \rangle \doteq (\gamma L^{-2} \beta^{-2})^2$$

が得られる。この式で右辺は一定なので, 電流の揺動をおさえようとする電荷の揺動が大きくなる。これは量子力学における不確定性関係に類似して面白。

さて, ここで1節で述べた O-U 過程から Wiener 過程への時間尺度変換を行なってみよう。LR 回路のランジュバン方程式 (4.7) は, 時間 t についての2階微分の項を含んでおり, したがって O-U 過程型の確率過程を記述している。この O-U 過程を時定数 β^{-1} に比べて充分大きな時間尺度で見ることとする。すなわち, β^{-1} 程度の時間の間の電荷 $q(t)$ の細かな変化に見ずに, その間の平均のみを見たい。そのため, (4.7) の両辺を重み $\beta \exp[-\beta(t-t')]$ をかけて時間平均しよう。この重みは $\beta^{-1} \geq |t-t'|$ でゼロでない値を持っている。したがって, この重みをかけて区間 $(-\infty, t)$ で積分すれば, 時定数 β^{-1} より小さい時間の間の細かな変化が平均されることになる。平均を実行する際, $\beta^{-1} = LR^{-1} \doteq 0$ とみなせることに注意すれば

$$(4.16) \quad \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \eta(t)$$

$$(4.17) \quad \bar{q}(t) = \beta \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\beta(t-t')] q(t')$$

$$(4.18) \quad \eta(t) = R^{-1} \beta \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\beta(t-t')] \xi(t')$$

を得る. $\eta(t)$ の統計的性質は,

$$(4.19a) \quad \langle \eta(t) \rangle = 0$$

$$(4.19b) \quad \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \gamma\beta(2R^2)^{-1} \exp(-\beta|\tau|) \xrightarrow{\beta^{-1} \rightarrow 0} \gamma R^{-2} \delta(\tau)$$

である. (4.16) と (4.19) はウィーナー過程のランジュバン方程式に他ならない. このことは, β^{-1} が無視できるような大きな時間尺度へ移行した場合, O-U 過程のランダム変数 $q(t)$ がウィーナー過程型に見えてくることを意味している. $\alpha = \frac{1}{2}\gamma R^{-2} = kTR^{-1}$ は拡散定数である.

5. フォッカー・プランク方程式

熱平衡状態への接近を調べるのに, これまではランジュバン方程式を用いてきた. これは, 確率変数 $q(t)$ 自身の時間発展を記述する方程式であった. この節では, $q(t)$ の確率分布関数 $P(q, t)$ の時間発展を記述するフォッカー・プランク方程式を用いて, 熱平衡状態への接近を調べる.

まず, ランジュバン方程式からフォッカー・プランク方程式を導こう. 次のようなランジュバン方程式で記述されるウィーナー型確率過程を考える.

$$(5.1) \quad \frac{dq(t)}{dt} - \frac{1}{f} K(q) = \eta(t)$$

$$(5.2a) \quad \langle \eta(t) \rangle_{\eta} = 0$$

$$(5.2b) \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle_{\eta} = 2\alpha\delta(t-t')$$

$$(5.2c) \quad \alpha \equiv kT/f$$

ここで, $K(q)$ はブラウン運動粒子に作用する外力などを表す q の関数である. また $\langle \dots \rangle_{\eta}$ の添字 η は, η についての集合平均であることを明示するため用いた. 以後, これと区別して, 時刻 t での確率分布関数 $P(q, t)$ を重みとして計算した平均値を $\langle \dots \rangle_t$ と書くことにする. 我々の目標は, 確率過程の記述においてランジュバン方程式 (5.1) と等価な $P(q, t)$ に対する方程式をつくることである. それには, q の任意の関数 $F(q)$ の期待値に対して,

$$(5.3) \quad \langle F(q(t)) \rangle_{\eta} = \langle F(q) \rangle_t$$

$$(5.4) \quad \langle F(q) \rangle_t \equiv \int F(q) P(q, t) dq$$

を満足するような $P(q, t)$ を与える方程式を作ればよい.

(5.1) を Ito 型の差分方程式に書きかえると

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \Delta q(t) &\equiv q(t+\Delta t) - q(t) \\ &= f^{-1} K(q(t)) \Delta t + \eta(t) \Delta t \end{aligned}$$

となる. これと, $\langle \eta(t)^2 \rangle_{\eta} = 2\alpha\delta(0) \sim (\Delta t)^{-1}$, つまり $\eta(t)$ は $(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}$ 程度, $\eta(t)\Delta t$ は $(\Delta t)^{1/2}$ 程度の大きさであることを考慮して, $F(q)$ をテーラー展開すると,

$$\begin{aligned}
F(q(t+\Delta t)) &= F(q(t) + \Delta q(t)) \\
&= F(q(t)) + \frac{\partial F(q(t))}{\partial q} \Delta q(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(q(t))}{\partial q^2} (\Delta q(t))^2 + O(\Delta t^{3/2})
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
(5.6) \quad F(q(t+\Delta t)) &\doteq F(q(t)) + \frac{\partial F}{\partial q} [f^{-1}K(q)\Delta t + \eta\Delta t]_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} (\eta(t)\Delta t)^2
\end{aligned}$$

を得る。両辺の平均をとり、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$(5.7) \quad \frac{d}{dt} \langle F(q(t)) \rangle_\eta = f^{-1} \langle \frac{\partial F}{\partial q} K(q(t)) \rangle_\eta + \alpha \langle \frac{\partial^2 F(q(t))}{\partial q^2} \rangle_\eta$$

という方程式が得られる。ここで、

$$\langle \frac{\partial F(q(t))}{\partial q} \eta(t) \rangle_\eta = \langle \frac{\partial F(q(t))}{\partial q} \rangle_\eta \langle \eta(t) \rangle_\eta = 0$$

であることを用いた。これは Ito 型方程式によれば、 $q(t)$ および $\frac{\partial F(q(t))}{\partial q}$ は時刻 $t - \Delta t$ までの η だけに依存し、 $\eta(t)$ とは独立だからである。さて、(5.3) を要求すれば、(5.7) に対応して、任意の $F(q)$ を与えたとき、

$$\begin{aligned}
(5.8) \quad \int F(q) \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} dq &= \int [f^{-1} \frac{\partial F(q)}{\partial q} K(q)] P(q, t) dq \\
&\quad + \alpha \int \frac{\partial^2 F(q)}{\partial q^2} P(q, t) dq \\
&= \int F(q) [-f^{-1} \frac{\partial}{\partial q} K(q) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial q^2}] P(q, t) dq
\end{aligned}$$

が成立しなければならない。 $F(q)$ は任意の力学量だから、(5.8) は

$$(5.9) \quad \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = [\alpha \frac{\partial^2}{\partial q^2} - f^{-1} \frac{\partial}{\partial q} K(q)] P(q, t)$$

を与える。これがフォッカー・プランクの方程式であり、確率過程の記述としては (5.1) と等価な方程式である。

フォッカー・プランク方程式 (5.9) の解 $P(q, t)$ の熱平衡状態への接近の様子を調べるには、フォッカー・プランク演算子

$$(5.10) \quad \hat{\mathcal{L}} \equiv \alpha \hat{D}^2 - f^{-1} \hat{D}K \quad \left(D \equiv \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

の固有値 $-\lambda_n$ のスペクトルについて調べる必要がある。そこで、固有値方程式

$$(5.11) \quad \hat{\mathcal{L}} u_n = -\lambda_n u_n$$

を考えよう。なお、以下演算子には \wedge をつけてふつうの数と区別する。(5.11) の両辺に左から $\exp(-\hat{G})$ をかけて相似変換を行なう。すなわち、

$$(5.12) \quad \hat{\mathcal{L}} \bar{u}_n = -\lambda_n \bar{u}_n$$

$$(5.13a) \quad \hat{\mathcal{F}} \equiv \exp(-\hat{G}) \hat{\mathcal{F}} \exp(\hat{G})$$

$$(5.13b) \quad \bar{u}_n \equiv \exp(-\hat{G}) u_n$$

(5.12) は, $\hat{\mathcal{F}}$ を相似変換して作った演算子 $\hat{\mathcal{F}}$ が $\hat{\mathcal{F}}$ と同じ固有値を持つことを意味する. 一般に演算子 \hat{F} の相似変換が

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \exp(-\hat{G}) \hat{F} \exp(\hat{G}) &= \hat{F} + [\hat{F}, \hat{G}] \\ &\quad + (2!)^{-1} [[\hat{F}, \hat{G}], \hat{G}] \\ &\quad + (3!)^{-1} [[[\hat{F}, \hat{G}], \hat{G}], \hat{G}] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

で与えられることを思い出そう. ただし, $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. いま, \hat{G} が微分演算子 \hat{D} を含まず, q の単なる関数 $G(q)$ であるとする, (5.14) より,

$$(5.15) \quad \exp(-G)\hat{D}\exp(G) = \hat{D} + [\hat{D}, G(q)] = \hat{D} + \frac{\partial G(q)}{\partial q}$$

を得る. ($f(q)$ を q の任意の関数とすると, $[D, G(q)]f(q) = \frac{\partial G}{\partial q}f(q)$. この意味で (5.15) の 2 番目の等号が成立する.) これを用いると, $\hat{\mathcal{F}}$ の相似変換 $\hat{\mathcal{F}}$ は,

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} &= \exp(G(q))[\alpha\hat{D}^2 - F^{-1}\hat{D}K(q)]\exp(G(q)) \\ &= \alpha(\hat{D} + \frac{\partial G}{\partial q} - (2af)^{-1}K)^2 - (2f)^{-1}\frac{\partial K}{\partial q} - (4df^2)^{-1}K^2 \end{aligned}$$

ここで,

$$(5.17) \quad \frac{\partial G(q)}{\partial q} = (2af)^{-1}K(q)$$

となるように $G(q)$ を選ぶと, (5.16) の右辺において, \hat{D} の 1 次の項は消えて,

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} &= -\alpha[-\hat{D}^2 + (2af)^{-1}\frac{\partial K(q)}{\partial q} + (4d^2f^2)^{-1}K(q)^2] \\ &= -\alpha\hat{A}^*\hat{A} \end{aligned}$$

を得る. ただし

$$(5.19) \quad \hat{A} \equiv -\hat{D} + (2af)^{-1}K(q), \quad \hat{A}^* \equiv \hat{D} + (2af)^{-1}K(q)$$

である. \hat{A}^* は \hat{A} の共役演算子であり,

$$(5.20) \quad (\hat{A}^*f, q) = (f, \hat{A}g)$$

によって定義される. ただし,

$$(f, g) = \int da f^*(a)g(a).$$

したがって, (5.12) の両辺に \bar{u}_n^* をかけて内積をつくると,

$$(5.21) \quad (\bar{u}_n, -\alpha\hat{A}^*\hat{A}\bar{u}_n) = -\lambda_n(\bar{u}_n, \bar{u}_n)$$

すなわち,

$$(5.22) \quad \lambda_n = \alpha \frac{(\bar{u}_n, \hat{A}^* \hat{A} \bar{u}_n)}{(\bar{u}_n, \bar{u}_n)} = \alpha \frac{\|\hat{A} \bar{u}_n\|^2}{\|\bar{u}_n\|^2} \geq 0$$

が得られる。ここで $\|f\| \equiv \sqrt{(f, f)}$ はノルムである。(5.22) から $\hat{\mathcal{L}}$ (したがって $\hat{\mathcal{F}}$) の固有値 $-\lambda_n$ はゼロか負であることがわかる。当分の間、最大固有値 $-\lambda_0=0$ が離散的ゼロであると仮定しておこう。固有値ゼロに属する固有関数を \bar{u}_0 とすれば、 \bar{u}_0 は

$$\hat{A} \bar{u}_0 = 0,$$

または

$$(5.23) \quad (-\hat{D} + (2\alpha f)^{-1} K(q)) \bar{u}_0 = 0$$

を満足する。(5.23) はただちに解けて、その解は

$$(5.24) \quad \bar{u}_0(q) = \text{const} \cdot \exp[-(2\alpha f)^{-1} V(q)],$$

となる。ただし、 $V(q)$ は

$$(5.25) \quad K(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

で与えられる関数である。物理的には、 $K(q)$ を力とすれば $V(q)$ はそのポテンシャルである。 $\hat{\mathcal{F}}$ と $\hat{\mathcal{L}}$ の固有値は共通であるが、同じ固有値 λ_n に属する $\hat{\mathcal{F}}$ と $\hat{\mathcal{L}}$ の固有関数 u_n と \bar{u}_n の間には(5.13 b)の関係があることに注意してほしい。したがって離散的ゼロ固有値の固有関数 u_0 は、

$$(5.26) \quad u_0 = \exp(G) \bar{u}_0 = \text{const} \cdot \exp(-(\alpha f)^{-1} V(q))$$

である。

さて、フォッカー・プランク方程式

$$(5.27) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(q, t) = \hat{\mathcal{L}} P(q, t)$$

の形式解は

$$(5.28) \quad P(q, t) = \exp(t \hat{\mathcal{L}}) P_0(q)$$

と書ける。 $P_0(q)$ は $t=0$ での初期分布である。いま、 $\hat{\mathcal{L}}$ の固有関数列 $\{u_n\}$ が完全系を張ると仮定する。 $P_0(q)$ をこの $u_n(q)$ で展開する。

$$(5.29) \quad P_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(q); \quad c_n = (\bar{u}_n, \exp(-G) P_0)$$

これを(5.28)に代入すると、 $P(q, t)$ の展開式

$$(5.30) \quad P(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n t) u_n(q)$$

を得る。したがって、 $t \rightarrow \infty$ での熱平衡分布は、

$$(5.31) \quad \begin{aligned} P_{\text{eq}}(q) &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P(q, t) = c_0 u_0(q) \\ &= \text{const} \cdot \exp(-(\alpha f)^{-1} V(q)) \end{aligned}$$

となる。熱平衡状態での期待値は、この P_{eq} を重み関数として計算すればよい。なお、 $\alpha f = kT$ である(5.2c)を見よ。固有値 $-\lambda_n$ が、区間 $(-\infty, 0)$ の連続スペクトルをとり、離散的ゼロをもたないとき、(5.30)は

$$(5.32) \quad P(q, t) = \int d\lambda c_\lambda \exp(-\lambda t) u_\lambda(q) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

となる。単純拡散過程はこの場合である。

6. 確率過程の演算子表示

確率変数 $q(t)$ の任意の関数 $F(q(t))$ の時刻 t での期待値は、確率分布関数 $P(q, t)$ を用いて

$$(6.1) \quad \langle F(q) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dq F(q) P(q, t)$$

と書ける。そして $P(q, t)$ は、フォッカー・プランク方程式

$$(6.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(q, t) = \hat{\mathcal{L}} P(q, t)$$

を満足する。ランジュバン方程式のかわりに、このフォッカー・プランク方程式によって $q(t)$ の確率過程を記述してもよい。(6.2) は量子力学におけるシュレーディンガー方程式と形がよく似ている。しかし、(6.2) の解 $P(q, t)$ はそれ自身が確率分布関数を与えるが、シュレーディンガー方程式の解(波動関数)はその絶対値自乗が確率分布関数となる点が違う。とはいえ、シュレーディンガー方程式とフォッカー・プランク方程式の数学的構造の類似は、量子力学で用いられる手法が確率過程の計算に使えることを示唆している。この節では、量子力学で用いられる演算子を用いた計算手法を確率過程に応用することを考えよう。

期待値 (6.1) では、その時間的変動を確率分布関数 $P(q, t)$ が与える。これは、量子力学でいえば、シュレーディンガー方程式の解である波動関数に、系の時間変化の記述を受け持たせる方式「シュレーディンガー描像」と似ている。量子力学の場合、系の時間変化を力学量演算子を受け持たせる方式「ハイゼンベルグ描像」もある。両者はもちろん同じ期待値を与える。問題に応じて便利な描像を選べばよいのである。

期待値 (6.1) において、 $F(q)$ の方に時間的変動を受け持たせてみよう。(5.28) より、(6.1) は、

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \langle F(q) \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dq F(q) P(q, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(t \hat{\mathcal{L}}) \exp(-t \hat{\mathcal{L}}) F(q) \exp(t \hat{\mathcal{L}}) P_0(q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(t \hat{\mathcal{L}}) \hat{F}_t P_0(q), \end{aligned}$$

となる。ここで $P_0(q)$ は $t=0$ での初期分布、 \hat{q}_t と \hat{F}_t は、

$$(6.4a) \quad \hat{q}_t \equiv \exp(-t \hat{\mathcal{L}}) q \exp(t \hat{\mathcal{L}})$$

$$(6.4b) \quad \hat{F}_t \equiv \exp(-t \hat{\mathcal{L}}) F(q) \exp(t \hat{\mathcal{L}})$$

で定義される演算子である。 \hat{F}_t は $F(q)$ において q を \hat{q}_t で置きかえたものになっている。なぜならば、(6.4 b) 中の $F(q)$ を巾級数に展開すると、

$$\begin{aligned}
(6.5) \quad & \exp(-t\hat{\mathcal{F}})F(q)\exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\
& = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})(a_0 + a_1q + a_2q^2 \cdots) \exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\
& = a_0 + a_1 \exp(-t\hat{\mathcal{F}})q \exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\
& \quad + a_2 \exp(-t\hat{\mathcal{F}})q^2 \exp(t\hat{\mathcal{F}}) \exp(-t\hat{\mathcal{F}})q \exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\
& \quad + \cdots \\
& = a_0 + a_1\hat{q}_t + a_2\hat{q}_t^2 + \cdots \\
& = F(\hat{q}_t)
\end{aligned}$$

となるからである。すなわち、

$$(6.6) \quad \hat{F}_t = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})F(q)\exp(t\hat{\mathcal{F}}) = F(\hat{q}_t)$$

である。

また、 $P(q, t)$ は確率分布であるから、確率保存則は

$$(6.7) \quad \frac{d}{dt} \int P(q, t) dq = \int \hat{\mathcal{F}} P(q, t) dq = 0$$

を満足しなければならない。したがって、フォッカー・プランク演算子 $\hat{\mathcal{F}}$ は必ず一番左側に微分演算子を持ち、 $\hat{\mathcal{F}} = \frac{\partial}{\partial q}(\cdots)$ という形をしている。このことより (6.3) はさらに、

$$\begin{aligned}
(6.8) \quad & \langle F(q) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dq \left(1 + t\hat{\mathcal{F}} + \frac{1}{2}t^2\hat{\mathcal{F}}^2 + \cdots \right) \\
& \quad \times F(\hat{q}_t)P_0(q) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[1 + \frac{\partial}{\partial q}(\cdots) \right] F(\hat{q}_t)P_0(q) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dq F(\hat{q}_t)P_0(q)
\end{aligned}$$

と書き直せる。すなわち

$$(6.9) \quad \langle F(q) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dq F(\hat{q}_t)P_0(q).$$

たしかに、確率過程の時間発展は $\hat{F}_t = F(\hat{q}_t)$ によって記述されている。これを「ハイゼンベルグ描像」といってもよからう。 $\hat{F}_t = F(\hat{q}_t)$ の運動方程式は (6.4 b) を直接微分することによってえられる：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{F}_t & = \exp(-t\hat{\mathcal{F}}) \{ F(q)\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}F(q) \} \exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\
& = \hat{F}_t \hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}} \hat{F}_t,
\end{aligned}$$

すなわち

$$(6.10) \quad \frac{d}{dt} \hat{F}_t = [\hat{F}_t, \hat{\mathcal{F}}_t]$$

(6.10) は量子力学のハイゼンベルグ方程式に対応するものである。ここで $\hat{\mathcal{F}}_t$ は

$$(6.11a) \quad \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_t & = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})\hat{\mathcal{F}}(q, \hat{D})\exp(t\hat{\mathcal{F}}) \\ & = \hat{\mathcal{F}}(\hat{q}_t, \hat{D}_t) \end{aligned}$$

$$(6.11b) \quad D_t = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})D\exp(t\hat{\mathcal{F}})$$

によって与えられるが, $\hat{\mathcal{F}}_t = \hat{\mathcal{F}}$ でもある. なお,

$$(6.12) \quad [\hat{D}_t, \hat{q}_t] = [\hat{D}, q] = 1$$

が成立する. これは量子力学の正準交換関係に相当する.

簡単な具体例を考えよう. ウィーナー過程のランジュバン方程式

$$(6.13) \quad \frac{d}{dt}q(t) = \eta(t)$$

を考える. $\eta(t)$ の統計的性質は (5.2) で与えられる. 対応するフォッカー・プランク演算子は (5.10) より,

$$(6.14) \quad \hat{\mathcal{F}} = \alpha \hat{D}^2$$

$$(6.15) \quad \hat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial q}$$

である. $q(t)$ の初期条件を $q(0) = q_0$ とする. このとき, 初期分布は

$$(6.16) \quad P_0(q, t) = \delta(q - q_0)$$

である. この初期条件のもとで任意の時刻 t での $F(q)$ の期待値 (6.9) を求めよう. (6.14) と (6.10) より

$$(6.17) \quad \frac{d}{dt}\hat{q}_t = [\hat{q}_t, \hat{\mathcal{F}}] = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})[q, \hat{\mathcal{F}}]\exp(t\hat{\mathcal{F}}) = -2\alpha\hat{D}_t$$

を得る. \hat{D}_t の時間発展は

$$(6.18) \quad \frac{d}{dt}\hat{D}_t = [\hat{D}_t, \hat{\mathcal{F}}] = \exp(-t\hat{\mathcal{F}})[\hat{D}, \hat{\mathcal{F}}]\exp(t\hat{\mathcal{F}}) = 0$$

で記述される. (6.17) と (6.18) は簡単に解ける. $t=0$ で $\hat{q}_t = q$, $\hat{D}_t = \hat{D}$ であるから解は,

$$(6.19a) \quad \hat{D}_t = \hat{D}$$

$$(6.19b) \quad \hat{q}_t = q - 2\alpha t \hat{D}$$

となる. よって

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \langle q \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dq (q - 2\alpha t \hat{D}) P_0(q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq q \delta(q - q_0) \\ &= q_0 \end{aligned}$$

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \langle q^2 \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dq (q - 2\alpha t \hat{D})^2 P_0(q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq [q^2 - 2\alpha t (q\hat{D} + \hat{D}q) + 4\alpha^2 t^2 \hat{D}^2] P_0(q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq [q^2 - 2\alpha t (2\hat{D}q - 1) + 4\alpha^2 t^2 \hat{D}^2] P_0(q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq [q^2 + 2\alpha t] \delta(q - q_0) \\ &= q_0^2 + 2\alpha t \end{aligned}$$

などの期待値がえられる. なお, (6.21) の 3 番目の等号では交換関係 (6.12) を用いた. (6.20) と (6.21) は確かにウィーナー過程における平均と分散を与えている.

もうひとつ具体例を示そう。ランジュバン方程式

$$(6.22a) \quad \frac{d}{dt}q(t) = f^{-1}K(q) + \eta(t)$$

$$(6.22b) \quad K(q) = -aq, \quad a > 0$$

$$(6.22c) \quad q(0) = q_0$$

によって記述される確率過程を考える。 $K(q) = -aq$ はフックの力を表す。対応するフォッカー・プランク演算子は

$$(6.23) \quad \hat{\mathcal{L}} = a\hat{D}^2 + af^{-1}\hat{D}q$$

となる。 \hat{q}_t 及び \hat{D}_t の時間発展は (6.10) により微分方程式

$$(6.24) \quad \frac{d}{dt}\hat{q}_t + af^{-1}\hat{q}_t = -2aD_t$$

$$(6.25) \quad \frac{d}{dt}\hat{D}_t = af^{-1}\hat{D}_t$$

で記述される。これらの解は

$$(6.26a) \quad \hat{D}_t = \hat{D} \exp(af^{-1}t)$$

$$(6.26b) \quad \hat{q}_t = q \exp(-af^{-1}t) - afa^{-1}\hat{D}[\exp(af^{-1}t) - \exp(-af^{-1}t)]$$

である。したがって、平均と2乗平均はそれぞれ

$$(6.27a) \quad \langle q \rangle_t = q_0 \exp(-af^{-1}t)$$

$$(6.27b) \quad \langle q^2 \rangle_t = q_0^2 \exp(-2af^{-1}t) + afa^{-1}[1 - \exp(-2af^{-1}t)],$$

である。(6.27 b) より、熱平衡状態では

$$\langle q^2 \rangle_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} afa^{-1}$$

である。(5.2 c) に従って $\alpha = kT/f$ とおけば、ポテンシャルの期待値は

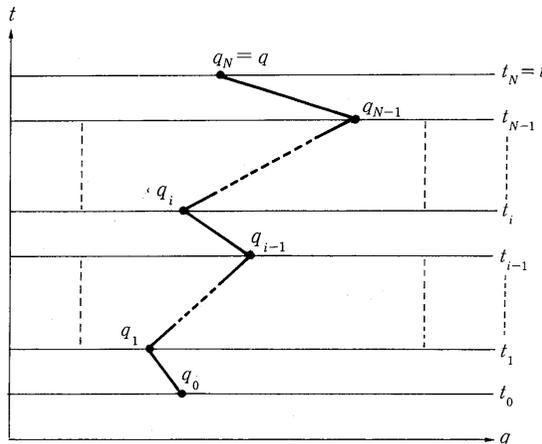


図 7.1 経路積分における特定の径路

$$(6.28) \quad \langle aq^2/2 \rangle_t = kT/2$$

となる。これは統計力学でおなじみのエネルギー等分配則に他ならない。

最後に交換関係 (6.12) についてももう少し説明しておきたい。(6.12) は量子力学の正準交換関係に対応する。量子力学では、正準交換関係の要請によって量子力学的ゆらぎの効果が取り入れられた。同様に確率過程論では (6.12) によって乱雑さが与えられるとも言える。この事実は、「ハイゼンベルグ方程式」(6.17) や (6.24) が元のランジュバン方程式 (6.13) と (6.22 a) において、 $\eta(t)$ を \hat{D}_t に取り換えた形をしているところにも反映している。

7. 確率過程の径路積分表示

前節で、確率過程は量子力学に極めて類似した形式で記述できることを見た。ここでは演算子形式の量子化法、つまり「正準量子化法」の理論形式を借用して確率過程を記述したわけである。ところで、量子化法には正準量子化法の他に「径路積分量子化法」があった。この節では「径路積分量子化法」の理論形式を用いて確率過程を記述することを考える。

時刻 t における確率変数 q の確率分布関数 $P(q, t)$ はマルコフ過程の場合、次のように書ける。

$$P(q, t) = \int T(q, t | q_0, t_0) P(q_0, t_0) dq_0$$

ここで、 $P(q_0, t_0)$ は時刻 $t_0 (< t)$ での確率分布関数、 $T(q, t | q_0, t_0)$ は時刻 t_0 に q_0 という値をもっていた確率変数が時刻 t に q という値を取る確率（遷移確率）である。マルコフ過程であるから、 t と t_0 の間をさらに細かくわけて、次の様に遷移確率を表現することができる：

$$(7.1) \quad \begin{aligned} T(q, t | q_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int T(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}) \cdots T(q_2, t_2 | q_1, t_1) \\ &\quad \times T(q_1, t_1 | q_0, t_0) \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \\ &\quad (q = q_N, t = t_N > t_{N-1} \cdots > t_2 > t_1 > t_0). \end{aligned}$$

この式の意味は図 7.1 を参照するとわかりやすい。(7.1) の被積分関数は各 $q_i (i=1, 2, \dots, N-1)$ を固定したとき、 $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow q_N$ という q_0 から q_N に至るひとつの径路が実現する確率を表している。そして、各 q_i の値を変化させると途中の径路が変わる。したがって、(7.1) の右辺の積分はあらゆる径路について、その径路が実現する確率を足し合わせたものになっている。

いま、ランジュバン方程式

$$(7.2) \quad \frac{d}{dt} q(t) = f^{-1} K(q(t)) + \eta(t)$$

で記述される確率過程を考える。これは時間について一階の微分方程式であるから、ある時刻 t_0 の $q(t_0)$ が与えられれば時刻 t での $q(t)$ は ($\eta(t)$ の関数として) 一意的に求まる。この確率過程において、 $T(q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1})$ を求めよう。ランジュバン方程式 (7.1) を差分化すると、

$$(7.3) \quad q_i = q_{i-1} + f^{-1} \Delta t K_{i-1} + E_i$$

$$(7.4a) \quad q_i \equiv q(t_i)$$

$$(7.4b) \quad K_i \equiv K(q(t_i))$$

$$(7.4c) \quad \mathcal{E}_i \equiv \int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta(t) dt$$

$$(7.4d) \quad \Delta t \equiv t_i - t_{i-1}$$

となる、つまり、時刻 t_i において確率変数 q がとる値 q_i は時刻 t_{i-1} における q の値 q_{i-1} と \mathcal{E}_i の値によって決まる。したがって、 q_i と q_{i-1} の値を指定したとき、 $(q_{i-1}, t_{i-1}) \rightarrow (q_i, t_i)$ という遷移確率は、ランジュバン方程式 (7.3) によれば \mathcal{E}_i がちょうど

$$(7.5) \quad q_i - q_{i-1} - f^{-1} \Delta t K_{i-1} \equiv X_i$$

という値 X_i をとる確率に等しい。 \mathcal{E}_i はガウス型雑音の和 (積分) であるから、やはりガウス型雑音である。その統計的性格は、(7.4c) と η の統計的性質 (5.2) より、

$$(7.6a) \quad \langle \mathcal{E}_i \rangle = 0$$

$$(7.6b) \quad \langle \mathcal{E}_i^2 \rangle = 2\alpha \Delta t$$

となる。したがって、変化 $(q_{i-1}, t_{i-1}) \rightarrow (q_i, t_i)$ が起る遷移確率は

$$(7.7) \quad \begin{aligned} T(q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1}) &= (2\pi \langle \mathcal{E}_i^2 \rangle)^{-\frac{1}{2}} \exp(-X_i^2 / 2 \langle \mathcal{E}_i^2 \rangle) \\ &= (4\pi\alpha\Delta t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-X_i^2 / 4\alpha\Delta t) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 X_i は (7.5) で与えられた値をとらなければならない。なお、ヤコビアンは $\partial(X_i)/\partial(q_i) = 1$ 。(7.7) を (7.1) に代入すると、

$$(7.8) \quad \begin{aligned} T(q, t | q_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left[\prod_{i=1}^{N-1} (4\pi\alpha\Delta t)^{-\frac{1}{2}} dq_i \right] \exp[-(4\alpha\Delta t)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N ((q_i - q_{i-1})\Delta t^{-1} - f^{-1}K_{i-1})^2 \Delta t^2] \\ &= \text{const} \cdot \int \mathcal{D}q(t) \exp[-(2\alpha)^{-1} \int_{t_0}^t \Lambda(q(t'), \dot{q}(t') dt')] \end{aligned}$$

となる。ここで $\int \mathcal{D}q(t)$ は $q(t)$ のすべての関数形 (径路) についての和を表す記号、 Λ は

$$(7.9) \quad \Lambda \equiv \left[\frac{dq}{dt} - f^{-1}K(q) \right]^2 / 2$$

である。(7.8) が確率過程の径路積分表示を与える。

量子力学における遷移振幅の径路積分表示と比べると、次の様な対応が成立する。

$$(7.10) \quad \begin{array}{ccc} & \text{量子力学} & \text{確率過程} \\ \text{ラグランジュアン} & L(q, \dot{q}) & \leftrightarrow \Lambda(q, \dot{q}) \\ & \frac{i}{\hbar} & \leftrightarrow -\frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

量子力学の場合に L からハミルトン演算子を与える手続きを、確率過程の場合に適用してみよう。すなわち、 $H = p\dot{q} - L(p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$ に対応する「ハミルトニアン」は、 $p = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} = \dot{q} - f^{-1}K$ を用いると

$$(7.11) \quad \begin{aligned} H &= p(p + f^{-1}K) - p^2 / 2 \\ &= (p + 2f^{-1}K)p / 2 \end{aligned}$$

となる。ここで、量子条件 $[\hat{p}, \hat{q}] = \hbar/i$ に対応する「乱雑化条件」 $[\hat{p}, \hat{q}] = -2\alpha$ を導入すれば、 p は $\hat{p} = -2\alpha\hat{D}$ という演算子になり、「ハミルトニアン」は $\hat{H} = 2\alpha\hat{\mathcal{H}}$ という演算子になる。 $\hat{\mathcal{H}}$ は (5.10) に等しい。この場合、「シュレーディンガー方程式」は

$$(7.12) \quad 2\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

となり、フォッカー・プランク方程式そのものを与える。

本稿は昭和 60 年度に統計数理研究所で著者が行なった講義をもとにしている。本稿を作成するにあたっては、統計数理研究所教授松縄規氏、早稲田大学大学院生田中覚氏、柴田浩行氏の協力を得た。深く感謝したい。

Stochastic Processes in Physics

Mikio Namiki

(The Institute of Statistical Mathematics, Department of Physics of Waseda University)

We study typical stochastic processes in physics and formulate mathematical ways of describing them.

First, we consider a simple model of one-dimensional Brownian-motion. Based on elementary dynamics, it is shown that position of a Brownian-motion particle is regarded as a random variable in our observation on macroscopic scale, and it obeys a Langevin equation with friction and random forces subject to the fluctuation-dissipation theorem.

Next, the Nyquist theorem (fluctuation-dissipation theorem) is generally formulated in terms of "impedance", which enables us to obtain the impedance from correlation functions and vice versa.

Based on the fluctuation-dissipation theorem, we deal with a few examples of electric circuits with random noises in stationary and transient states.

Finally, we discuss the Fokker-Planck equation which describes stochastic processes as well as the Langevin equation. Based on the Fokker-Planck equation, we formulate an operator representation of stochastic processes. This representation is analogous to the formalism of canonical quantization in quantum mechanics. The path-integral representation of stochastic processes is also presented.