がなければ，$k$ の値は1以下に限定される．

同様にして，1つの地震が，次に起こる $\beta$ 個の地震の種を持つと考えてもよい．ただし，次に起こる地震の大きさは，前に起きた地震の大きさに比例するものと考える．これを相似分岐モデルと呼んでおくが，この時には，べき数 $k$ は1を越えてもさしつかえない．

これまでは時間的前後関係を持つ例について説明したが，その点は本質的ではない．大きさ $x_0$ の領域で起こる最大の事象を $x_1$ とする．空間（資源と呼ぶ）の形状が相似なら，$x_0$ の $C$ 倍の領域で起こる最大の事象は $x_1$ の $C$ 倍と考えてよいであろう．空間（資源）の形状が変われば比例定数 $C$ も変化するが，その補正をパラメータ $\beta$ で表現したのが上のモデルである．

### (3) べき数 $k$ と空間（資源）の次元 $d$

$\underline{d=3}$ 体積や質量，エネルギーが関係した大きさ分布．$k$ の値は2/3（ないし3/4）前後．隕石や小惑星，破砕してできる小片の大きさ，地震の大きさ（断層面積×断層変位）等がこれに該当．

$\underline{d=2}$ 面積や平面に結びついた大きさ分布で，$k$ は1前後になることが多い．よく議論されるのは都市の人口分布．世界の国の人口や面積もこれに準じる．ただし大陸と島，海と湖の面積など，個々のものが本質的に点在する場合には $k$ の値はもっと小さく，この2例では1/2に近い．

$\underline{d=1}$ 直線上に分布したものの大きさ分布．$k$ は1/2前後．かつて強調されたほどきれいなべき型分布ではないが，生物の属の大きさ（属数種数の関係，下方極限）は1次元の分割と解釈できる．$Y$ 字型の棒の分割と解釈できる南北アメリカ大陸の国の人口分布も，これに近い．

$\underline{d=0}$ 空間の分割が生じない場合で，$k$ の値は0（下方極限）に相当．生物の種の大きさ（種数個体数の関係，元村の等比級数則）がその例．

$\underline{d\to\infty}$ 所得や企業の大きさ分布は，$d\to\infty$ の空間に分布したお金（資産）を分ける問題として考えてよいのではないかと思われる．$k$ は3/2～2前後．

## 群，グラフを値としてとる確率分布

統計数理研究所 伊 藤 栄 明

### 1. グラフを値としてとる確率分布

頂点1, 2, …, $n$ をもつ完全グラフから ${}_nC_2$ 個の各辺を確率 $q=1-p$ でとり除いた残りのグラフについて先ず考察する．これがグラフ $G$ と同型である確率は

$$\Pr(X\cong G)=\frac{n!}{|\Gamma(G)|}p^{{}_nC_2-m}q^m$$

である．ここで $m$ は $G$ の辺の数であり $|\Gamma(G)|$ は $G$ の自己同型群の位数である．これは典型的な場合であるが，一般にグラフを値としてとる確率分布あるいは確率過程というのは興味ある問題であると考えられる．

集団遺伝学，数理生態学におけるモデルとして次のようなランダムな衝突モデルを考える．種 $i$ が種 $j$ より強ければ，$i$, $j$ の各一粒子が互いに衝突することにより $i$ の2粒子になるという

ように相互作用を単純化する．2粒子の衝突時にどちらの粒子になるかは確率的に定まるとする．すなわち種 $i$ の1粒子が種 $j$ の1粒子より強い確率を $1/2+a_{ij}$ とする．ここで $a_{ij}+a_{ji}=0, |a_{ij}|\leqq 1/2$ を仮定する．いま，時刻 $t$ における種 $j$ の粒子数 $N_j(t)$ を並べ，ランダムベクトル $\overrightarrow{N}(t)=(N_1(t), N_2(t), \cdots, N_l(t))$ をつくる．離散的な時点を考え，各時点において1度だけランダムな2体衝突が起こるものと仮定する．種の間には固定した強弱関係が定められており，衝突に際し弱い種の粒子は強い種の粒子に変化する．すなわち $i\neq j$ なる $i$ と $j$ の衝突において $|a_{ij}|=1/2$ が成り立つものとする．種を node に，2種間の強弱関係を oriented arc に対応させれば，$l$ 種間の強弱関係は1つの有向グラフによって示される．これをトーナメント $[T]$ とよぶ．特にトーナメント $[T_r]$ は $2r+1$ 個の node $\{1, 2, \cdots, 2r+1\}$ からなり，$i-j\equiv 1, 2, \cdots, r (\mathrm{mod}\ 2r+1)$ のとき $i$ は $j$ より強いものとする．従って $[T_r]$ の各々の node は $r$ 個の他の node より強く，残りの $r$ 個の node より弱いということになる．いま，時刻0においてシステムに $\{1, 2, \cdots, l\}$ の $l$ 種が存在し，強弱関係はトーナメント $[V]$ であるとする．$[V]$ はある $[T_s]$ のサブトーナメントであるとする．総粒子数 $n$ は $t$ によらないが，各々の種の粒子数は $t$ とともに変化して行く．粒子数が0になった種はそこで消滅したことになり，以後も0のままである．$t$ とともに種は次々に消滅し，最終的には1つになる．いま，時刻 $t$ におけるトーナメントを $[R(t)]$ で表す．仮定から $[R(0)]=[V]$ である．$[V]$ のサブトーナメントで $[T_r]$ に同型なものを考え $r$ の最大値を $r_M$ とする．$\overrightarrow{N}(t)=\beta$ なる状態にあるシステムから $2r+1$ 個の粒子をとりだしたとき，それらの強弱関係を表わすトーナメントが $[T_r]$ に同型である場合の数を $H_{V,r}(\overrightarrow{\beta})$ と書く，これは $\overrightarrow{\beta}$ の $[T_r]$ らしさとでも言うべき量である．$\theta_r=1-2\frac{{}_{2r+1}C_2}{n(n-1)}$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Pr([R(t)]\cong[T_r]\,|\,\overrightarrow{N}(0)=\overrightarrow{\alpha})}{H_{V,r}(\overrightarrow{\alpha})Q_r\theta_r^t}=1, \qquad \text{(Itoh (1979))},$$

が成りたつことが示される．ここで $Q_r$ は $\sum_{i=1}^{2r+1} x_i=n$ の自然数の解 $x_1x_2\cdots x_{2r+1}$ をすべて考えそれらの算術平均をとったものであり，$\overrightarrow{N}(0)=\overrightarrow{\alpha}$ とする．以上は $|a_{ij}|=1/2$ の場合であったが $a_{ij}=0$ がすべての $i$，$j$ について成りたっている場合は集団遺伝学において基本的である Wright model に対応するランダムな衝突モデルである．

## 2. 群を値としてとる確率分布

3次元空間における周期的な構造の対称性を記述する230の空間群がある．自然界にあらわれる結晶はそれらのいずれかに属する．空間群を値としてとる統計的分布があり，群を値としてとる確率分布についての考察は意味あることと思われる．230の空間群において平行移動の操作からなる部分群を法とした剰余群を考える．それらは32個あり点群と呼ばれている．したがって点群は平行移動の操作を含まず，回転，鏡像等の対称操作からなる．この32という数は結晶の形態を整理して求めた晶族の数に等しい．対称の操作を加えて行くことにより同価点の数は整数倍されて行く．同価点の多い晶族の方が同価点の少い晶族よりも対称が高いといいこの逆を対称が低いという．今 $m3m$ といわれている点群を考える．$m3m$ は48個の対称操作からなる．そのうちの $k$ 個を重複をゆるしてランダムに指定し，それによって生成される点群についての分布を表に示す．現実のデータはこのような単純なモデルでは説明できないが，群を値としてとる確率分布についての研究は興味ある今後の課題であると思われる．

表. 点群を値としてとる確率分布のシミュレーション(実験回数1000)

| 群 | $k=2$ | $k=3$ | 群 | $k=2$ | $k=3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| m 3 m | 191 | 553 | 32 | 39 | 5 |
| 432 | 87 | 79 | 3 m | 20 | 5 |
| $\bar{4}$3 m | 91 | 85 | 4 | 13 | 1 |
| m 3 | 146 | 103 | $\bar{4}$ | 8 | 2 |
| 4/mmm | 0 | 32 | 222 | 9 | 1 |
| 23 | 41 | 18 | mm 2 | 37 | 9 |
| $\bar{3}$ m | 58 | 41 | 2/m | 24 | 5 |
| mmm | 0 | 10 | 3 | 13 | 3 |
| 4/m | 28 | 10 | 2 | 9 | 0 |
| $\bar{4}$2 m | 71 | 10 | m | 10 | 0 |
| 422 | 30 | 8 | $\bar{1}$ | 0 | 0 |
| 4 mm | 36 | 13 | 1 | 1 | 0 |
| $\bar{3}$ | 38 | 7 | | | |

## 参 考 文 献

Itoh, Y. (1979). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Prob.*, **16**, 36-44.
Palmer, E.M. (1985). *Graphical evolution*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
仁田 勇(監修)(1959). X線結晶学 上, 丸善, 東京.

## パターン生成のモデルとそのあてはめ

統計数理研究所 種 村 正 美

平面上の領域 $V$ に $N$ 個の点が散布されており, 各点の位置座標を $x_i(i=1, 2, \cdots, N)$ とする. 各点をたとえば生物個体とみなし, 生息地 $V$ に定着している $N$ 個体の生物集団を考える. $N$ 個体の位置座標全体を $X$ で表わすと, $X$ には配置パターンに関する情報が原理上すべて含まれており, パターンが生成された過程についても履歴が残されているであろう. われわれの目的は, 位置座標 $X$ の与えられたデータに対して, 想定しうるパターン生成モデルをいくつか考察してそれらをあてはめ, そしてそれらの適合性からデータに妥当なモデルを求めることである.

パターン生成のモデルとして, 以下ではわれわれは個体間距離 $r$ に依存する相互作用ポテンシャル $\Phi(r)$ のもとでのギブス平衡分布モデル, および同一のポテンシャルのもとでの逐次充塡モデルを考える. これらは例えば, 個体間で互いに反発型の相互作用をするなわばり性動物において, なわばりの位置が互いに調節される場合と調節されない場合という定着過程のちがいを表現している.

データがポテンシャル $\Phi(r)$ のもとで平衡な配置であることを仮定すると, ギブス分布を尤度関数として使えるが, その仮定が成立しない場合にはそれができない. そこで, いくつかのパターン生成モデルを同時に比較するため, われわれは尤度法の代わりに経験的手法を用いる. すなわち, 空間配置を表現する統計量 $T$ についてデータから得られる経験分布関数 $F(t)$ とモデルのそれとの適合性を考察するのである.