サイズ分布と空間の相似分割モデル

東京大学地震研究所　山　科　健一郎

(1)　は じ め に

小さいものの数は多く，大きいものの数は少ないという（負の）べき型の分布についてとりあげる．大きさ x を横軸に，順位（または大きい方から数えた累積の数）N を縦軸に，それぞれ対数目盛りでプロットした時，右下りの直線になる現象がいろいろ知られている．その（負の）傾き k は，現象によってそれぞれほぼ個有の値をとるが，その値は，大きさ x が属している空間の次元（自由度）と密接に関係するらしい．べき型の関係に対する解釈，ならびに空間の次元と k の値に見られる経験的関係について指摘することが，ここでの主題である．

今とりあげる大きさ分布は，大きさ x と順位（累積頻度）$N(x)$，または頻度 $n(x)$ の間に次のようなべき型の関係が見られる場合である．

$$\log N(x)+k\log x=\text{const.}$$
$$\log n(x)+(k+1)\log x=\text{const.}$$

ここで，大きさ x としては，たし算が意味のあるパラメータを採用する．例えばボールの大きさなら，直径や表面積ではなく，ボールの体積，または質量で大小を比較する．そう約束すれば，ボールの形状が(質量分布等も含め)相似である限り，べき数 k の値は一意的に定まる．なお，大きさ x を1次元のパラメータにおき直した時のべき数 k は，フラクタル次元と密接に関係している．

なお，現象によっては，極端に大きなものの数が減るのと同様，極端に小さなものの頻度も減少する．このような場合，べき型の分布ではなく正規分布や対数正規分布その他にあてはめて考えた方が，全体を記述するためには好都合かもしれない．しかし大きいものの数が減る理由と，小さいものの数が減る理由とは，同じとは限らない．ここでは，分布の主要部あるいは適当な下限の値以上の範囲について注目し，大きさ x に下限が生じる機構についてはとりあげない．

(2)　空間の相似分割と相似分岐

地震の大きさ（エネルギーまたは地震モーメント）を例にとる．小さな地震は頻繁に発生するが，大きな地震はめったに起こらず，その大きさは広範囲にわたりべき型の分布となる．まずエネルギー x_0 の貯えられている領域で，大きさ $x_1=\alpha x_0$ の地震が起きたとする．ただし $0<\alpha<1$. この時，残されたエネルギーは $(1-\alpha)x_0$ であるが，次に起こる地震の大きさは $\alpha(1-\alpha)x_0$ とは限らない．残されたエネルギーは空間的に一様ではなくなる(例えばドーナツ型となる)から，事実上いくつかの小部分に分かれ，それぞれの部分ごとにその α 倍の地震が次に起こると考える．すなわち，初めの地震で空間が β 個に分かれるものとすれば，次に起こる β 個の地震の（平均の）大きさは $\alpha(1-\alpha)x_0/\beta$. 同じ操作を繰り返していけば，(分布の上限では少し形が崩れるが)べき数 $k=1/(1-\log(1-\alpha)/\log\beta)$ のべき型の分布が得られる．これを相似分割モデルと呼んでおく．この場合，同一部分が次の地震に対して2重に寄与するようなこと

がなければ，k の値は1以下に限定される．

同様にして，1つの地震が，次に起こる β 個の地震の種を持つと考えてもよい．ただし，次に起こる地震の大きさは，前に起きた地震の大きさに比例するものと考える．これを相似分岐モデルと呼んでおくが，この時には，べき数 k は1を越えてもさしつかえない．

これまでは時間的前後関係を持つ例について説明したが，その点は本質的ではない．大きさ x_0 の領域で起こる最大の事象を x_1 とする．空間（資源と呼ぶ）の形状が相似なら，x_0 の C 倍の領域で起こる最大の事象は x_1 の C 倍と考えてよいであろう．空間（資源）の形状が変われば比例定数 C も変化するが，その補正をパラメータ β で表現したのが上のモデルである．

（3） べき数 k と空間（資源）の次元 d

$\underline{d=3}$ 体積や質量，エネルギーが関係した大きさ分布．k の値は 2/3（ないし 3/4）前後．隕石や小惑星，破砕してできる小片の大きさ，地震の大きさ（断層面積×断層変位）等がこれに該当．

$\underline{d=2}$ 面積や平面に結びついた大きさ分布で，k は1前後になることが多い．よく議論されるのは都市の人口分布．世界の国の人口や面積もこれに準じる．ただし大陸と島，海と湖の面積など，個々のものが本質的に点在する場合には k の値はもっと小さく，この2例では 1/2 に近い．

$\underline{d=1}$ 直線上に分布したものの大きさ分布．k は 1/2 前後．かつて強調されたほどきれいなべき型分布ではないが，生物の属の大きさ（属数種数の関係，下方極限）は1次元の分割と解釈できる．Y 字型の棒の分割と解釈できる南北アメリカ大陸の国の人口分布も，これに近い．

$\underline{d=0}$ 空間の分割が生じない場合で，k の値は0（下方極限）に相当．生物の種の大きさ（種数個体数の関係，元村の等比級数則）がその例．

$\underline{d\to\infty}$ 所得や企業の大きさ分布は，$d\to\infty$ の空間に分布したお金（資産）を分ける問題として考えてよいのではないかと思われる．k は 3/2～2 前後．

群，グラフを値としてとる確率分布

統計数理研究所 伊 藤 栄 明

1. グラフを値としてとる確率分布

頂点 1, 2, …, n をもつ完全グラフから ${}_nC_2$ 個の各辺を確率 $q=1-p$ でとり除いた残りのグラフについて先ず考察する．これがグラフ G と同型である確率は

$$\Pr(X\cong G)=\frac{n!}{|\Gamma(G)|}p^{{}_nC_2-m}q^m$$

である．ここで m は G の辺の数であり $|\Gamma(G)|$ は G の自己同型群の位数である．これは典型的な場合であるが，一般にグラフを値としてとる確率分布あるいは確率過程というのは興味ある問題であると考えられる．

集団遺伝学，数理生態学におけるモデルとして次のようなランダムな衝突モデルを考える．種 i が種 j より強ければ，i, j の各一粒子が互いに衝突することにより i の2粒子になるという