を最小にするものを，それらの値とする．

局所線型マルコフ連鎖モデルとその河川流出解析への応用

尾　崎　　統

1.

河川や貯水池の水資源を有効に制御し利用する為に河川流出のダイナミックスを効果的にシミュレートするモデルが求められている．水文学における数理モデルとしてよく Storage（貯蔵）モデルが用いられる（例えば Moran のダム理論や菅原のタンクモデル）．簡単な場合それは

$$\dot{x}=f(x)+r(t) \tag{1}$$

のような入出力システムの形をとる．ここに $x(t)$ は t 時点の水の貯蔵量，$r(t)$ は t 時点の降雨その他に起因する水の増加率．この貯蔵モデルを基礎に Moran らはダムシステムの確率理論を展開，菅原らはタンクモデルによるモデル化の方法論を展開した．データ解析の立場からこれらの結果をみると必ずしも満足のいくものではない．そこで筆者は近年の非線型時系列解析の手法を用いてこの貯蔵モデルをデータから推定する方法を考えた．

2.

まずモデルの入力 $r(t)$ は多くの場合直接観測できないので，関連する量 $y(t)$ と分散 σ^2 の白色雑音 $n(t)$ を用いて，$r(t)=b\cdot y(t)+n(t)$ と仮定し，

$$\dot{x}=f(x\mid \boldsymbol{a})+by(t)+n(t) \tag{2}$$

なる貯蔵モデルを観測データ $\boldsymbol{z}=(x_1,\cdots,x_N,y_1,\cdots,y_N)$ から推定することを考える．(2) に対応する局所線型マルコフ連鎖モデルは Ozaki (1983) により

$$\begin{aligned}
x_{t+\Delta t}&=A_t\cdot x_t+B_t\cdot y_t+C_t w_{t+\Delta t} \\
A_t&=e^{K_t\Delta t},\ B_t=b(e^{K_t\Delta t}-1)/K_t, \\
C_t&=\sqrt{\{(e^{2K_t\Delta t}-1)/(2K_t)\}}, \\
K_t&=1/\Delta t\cdot\log\{1+J_t^{-1}(e^{J_t\Delta t}-1)f(x_t)/x_t\}, \\
J_t&=\{\partial f(x\mid\boldsymbol{a})/\partial x\}_{x=x_t},\ w_{t+\Delta t}\sim N(0,\sigma^2)
\end{aligned} \tag{3}$$

と与えられる．

3.

このモデルの最尤推定値 $(\hat{\boldsymbol{a}},\ \hat{b},\ \hat{\sigma}^2)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ によってきまる $\hat{A}_{\Delta t}(=\hat{A}_{\Delta t}(x\mid\hat{\boldsymbol{a}}))$ から対応する $f_{\Delta t}(x\mid\hat{\boldsymbol{a}})$ が次の局所線型化関係を満たすものとして定義される．

$$f_{\Delta t}(x\mid\boldsymbol{a})=\frac{\partial f_{\Delta t}(x\mid\boldsymbol{a})}{\partial x}\frac{\{A_{\Delta t}(x\mid\boldsymbol{a})-1\}x}{\exp\left\{\dfrac{\partial f_{\Delta t}(x\mid\boldsymbol{a})}{\partial x}\Delta t\right\}-1} \tag{4}$$

これを数値的に求めるには次の発展型偏微分方程式を基礎に繰り返し法で解けば発散することなく求まる．

$$\frac{\partial f_{\Delta t}(x,\ s\mid\boldsymbol{a})}{\partial s}=-f_{\Delta t}(x,\ s\mid\boldsymbol{a})+\left\{\frac{\partial f_{\Delta t}(x,\ s\mid\boldsymbol{a})}{\partial x}\right\}\frac{\{A_{\Delta t}(x\mid\boldsymbol{a})-1\}x}{\exp\left\{\dfrac{\partial f_{\Delta t}(x,\ s\mid\boldsymbol{a})}{\partial x}\Delta t\right\}-1} \tag{5}$$

何故なら(4)の $f_{\Delta t}(x \mid \boldsymbol{a})$ は(5)で定義される空間過程 $f_{\Delta t}(x, s \mid \boldsymbol{a})$ の $\dfrac{\partial f_{\Delta t}(x, s \mid \boldsymbol{a})}{\partial s}=0$ を満たす平衡解 $f_{\Delta t}(x, \infty \mid \boldsymbol{a})$ に等しいから.

4.

上で求めた $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ は正則条件のもとで一致的, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \to \boldsymbol{\theta}_{d,\Delta t}(=\boldsymbol{\theta}_0, \text{true})$, だが, この場合は少し違う. $\boldsymbol{\theta}_{d,\Delta t}$ にではなく $E_c[\log p(z, \boldsymbol{\theta})-\log p(z, \boldsymbol{\theta}_{c,\Delta t})]<0$, ${}^{\forall}\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_{c,\Delta t}$ なる $\boldsymbol{\theta}_{c,\Delta t}$ へ近づく. E_c は連続時間エルゴード過程(2)によってきまる確率測度に関する期待値. しかし(3)できまる離散時間エルゴード過程は $\Delta t \to 0$ で(2)に収束することがいえるので $\|\boldsymbol{\theta}_{c,\Delta t}-\boldsymbol{\theta}_{d,\Delta t}\| \to 0$ で結局 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow[N\Delta t \to \infty]{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\theta}_0$ がいえる. 詳細は T. Ozaki (1985) "Statistical identification of storage models with application to stochastic hydrology" Res. Memo No. 286, to appear in Water Resources Bulletin, を参照.

非ガウスフィルターの構成

北　川　源四郎

次のようなシステム方程式および観測方程式で表現される非線形システムが与えられているものとする.

$$
(1)\qquad \begin{aligned} x_n &= f(x_{n-1})+g(v_n) \\ y_n &= h(x_n)+w_n \end{aligned}
$$

ただし, $f(x)$, $g(x)$ および $h(x)$ は適当な次元の非線形関数, v_n および w_n は密度関数をもつ任意の確率変数とする. ここで, 観測値 $y_1, \cdots, y_N$ からシステムの時刻 n における状態を表わす x_n の確率分布を求めるフィルタリングおよびスムーシングの問題を考えることにする.

f, g, h が一次関数で, v_n および w_n がガウス分布の場合には, カルマンフィルターおよび固定区間スムーサーがこの問題の解を与えるが一般には非ガウス分布を何らかの形で表現する必要が生じる. 従来は, ガウス分布で近似したり, 複数個のガウス分布の和で近似することによりフィルタの構成が試みられてきたが十分な成果が得られたとはいい難い. 高速な計算機が利用できる現在ではスプライン関数等で分布を近似し数値的な処理を行う方が実用性が高い様に思われる. 原理的には次の二つのステップを順次実行するだけでよい.

一期先予測 (Convolution)

$$
(2)\qquad p(x_n \mid Y_{n-1})=\int p(x_n \mid x_{n-1})p(x_{n-1} \mid Y_{n-1})dx_{n-1}
$$

フィルター (ベイズの定理)

$$
(3)\qquad p(x_n \mid Y_n)=C \cdot p(y_n \mid x_n)p(x_n \mid Y_{n-1})
$$

同様にして

$$
(4)\qquad p(x_n \mid Y_N)=p(x_n \mid Y_n)\int \frac{p(x_{n+1} \mid Y_N)p(x_{n+1} \mid x_n)}{p(x_{n+1} \mid Y_n)}dx_{n+1}
$$

によって非ガウススムーサーも実現できることが分かった.

この非ガウスフィルタを用いて, ピリオドグラムの平滑化および時間的に変化する分散の推定を行なった. $w_n \sim \log \chi^2$, $v_n \sim$ ガウス分布又はコーシー分布として得られた結果は従来のカルマンフィルターによるものとはかなり異っている.

高次元の非ガウスフィルターを利用すれば, ① 非線形モデルの推定および状態推定, ② タンクモデルの様な非線形微分方程式で表現されるモデルの同定および状態推定, ③ 疑似周期を持つ時系列の基本波形と位相, 振幅への分解などが可能となる.