

揺らぐ媒体による移流・拡散

統計数理研究所	岸	野	洋	久
都公害研究所	伊	藤	政	志
統計数理研究所	野	田	一	雄
"	柏	木	宣	久

(1984年2月 受付)

1. 序

媒体により移流・拡散する媒質の濃度の時間変化を記述する式として、拡散方程式がある。これは時刻 t 、地点 x における媒質の濃度を $n = n(t, x)$ とすると

$$(i) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (An) + \frac{1}{2} \Delta(b^2 n) + \lambda$$

と表現される。ここで A は媒体の流速、 b^2 は拡散係数を表わし、 λ は湧き出しである。これは、保存則と、物質の輸送量が濃度勾配に比例するという仮定 (Fick の法則と呼ばれている) に基づいている。

ところで、この流速が $A = \bar{a} + a'$ と揺らいだとき、これが濃度の動きにどう反映されるかを見てみる。ただし \bar{a} は平均流速、 a' はそのまわりの揺れである。濃度もこれに対応して $n = \bar{n} + n'$ と書かれるから、(i) は

$$(ii) \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \frac{\partial n'}{\partial t} = -\nabla \cdot \{(\bar{a} + a')(\bar{n} + n')\} + \frac{1}{2} \Delta(b^2(\bar{n} + n')) + \lambda$$

となる。平均濃度は、辺々平均をとることにより

$$(iii) \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{a}\bar{n}) - \nabla \cdot (\overline{a'n'}) + \frac{1}{2} \Delta(b^2\bar{n}) + \lambda$$

を満たす。

一般に媒体の揺れと濃度の揺れは相関をもつために、右辺第二項からの寄与は無視できない。そこで、従来は、この項を \bar{n} を用いてパラメトライズすることにより、(iii) を \bar{n} の閉じた式にしてきた。

本稿では、対象とする物質の個々の分子の運動が、次の確率微分方程式

$$(iv) \quad dx^{(i)} = \{a(t, x^{(i)})dt + c(t, x^{(i)})d\tilde{B}_t\} + b(t, x^{(i)})dB_t^{(i)} \quad i = \dots -1, 0, 1, \dots$$

で表現される場合を扱う。ここで \tilde{B}_t 、 $B_t^{(i)}$; $i = \dots -1, 0, 1, \dots$ は互いに独立なブラウン運動である。右辺 $\{ \}$ の中は媒体の流れを示し、 $b(t, x^{(i)})dB_t^{(i)}$ は分子拡散を表わす。 $a(t, \cdot)$ は平均流速場、 $c(t, \cdot) \frac{d\tilde{B}_t}{dt}$ はそのまわりの揺らぎである。従って、本稿で扱うモデルでは、媒体の揺らぎが時間的にホワイトとなるような時間スケールで対象を見ていることになる。

このモデルの下では、第3.1節に見られるように、湧き出しを $\lambda(t, x)$ とすると、濃度は次の

確率偏微分方程式

$$(v) \quad dn(t, x) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((b^2(t, n) + c^2(t, x))n(t, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (a(t, x)n(t, x)) + \lambda(t, x) \right] dt - \frac{\partial}{\partial x} (c(t, x)n(t, x)) d\tilde{B}_t$$

に従うことが導かれる。

平均濃度 \bar{n} に関しては、拡散方程式

$$(vi) \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (a\bar{n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((b^2 + c^2)\bar{n}) + \lambda$$

を得る。(iii)との対応は、逆に Fick の法則を仮定して $n' = -\nabla(cn\tilde{B})$ とおき、 $a' = c\tilde{B}$ に注意すれば、(iii)から(vi)を導くことが出来る。媒体の揺らぎの影響は $\frac{1}{2} \Delta(c^2\bar{n})$ に現われ、拡散係数が

$$c^2 = \frac{\langle (\Delta t \text{ 内の媒体の揺らぎ})^2 \rangle}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

によって与えられるので、媒体の揺らぎを測定すれば拡散係数が求まる。

さらに、系3.2に見られるように、(v)から空間的分散共分散関数に関する方程式も導出することが出来る。これは、大気汚染における測定局の地域代表性などに際して参考になるであろう。

まず次節において通常の拡散方程式を導き、3節において媒体が揺らいでいる場合を取り扱う。さらに濃度の空間相関の満たす方程式を求め、二つの代表例を与える。続く4節では湧き出しの揺らぎを考慮に入れ、最後に5節において3節の証明をする。

尚、本稿における表現は一次元だが、三次元への拡張は容易である。また、モデルのデータへの具体的適用、パラメータを含む諸係数のデータからの推定方法とその具体的取り扱いなどの考察は、稿を改めて論ずることとする。

揺らぐ媒体に乗った物体の運動としては、潮流に乗った魚の行動、大気汚染物質の移流・拡散、河川・海域における物質などの移流、拡散や乱流中における物質の測定等、多くの自然現象として観測されている。本稿は著者らがこのような現象を念頭において独自に考えたものである。将来は乱流分野への応用の可能性もあると思われる。

2. 媒体による移流と分子拡散

本節では、媒体に揺らぎのない場合を扱う。ここには新しい結果は含まれていないが、次節の媒体に揺らぎがある場合の証明への橋渡しの役を演ずる。

まず、個々の粒子の運動を確率微分方程式により記述する。簡単の為一次元で表現するが、二次元或は三次元への拡張は容易である。各粒子は湧き出し源から噴出した後、分子拡散しながら風などの媒体に乗って運ばれる。上にも述べたように、本節では媒体の速度場は完全に観測されているとし、その揺らぎの影響については次節で扱う。分子拡散の特徴は媒体の乱れによる揺らぎと異なり各々の粒子が独立に揺らぐことである。

第一段階として、湧き出し源は点 y_0 のみに位置している場合を扱う。ここから次々に粒子が飛び出す訳であるが、いまその第 i 粒子が時刻 t_i に排出されたとする。($i = \dots, -1, 0, 1, \dots; \dots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \dots$)。この粒子のその後の時刻 t における位置を $x_i^{(t)}$ とおくと、それは次式

を満たす；

$$(1) \quad \begin{cases} dx_i^{(i)} = a(t, x_i^{(i)})dt + b(t, x_i^{(i)})dB_i^{(i)} \\ x_i^{(i)} = y_0 \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots \end{cases}$$

ここで $a(t, y)$ は地点 $y \in \mathbf{R}$, 時刻 t における媒体の速度場, $b(t, y)$ は地点 y , 時刻 t における分子拡散の揺らぎの標準偏差を表わす. 但し, \mathbf{R} は実数空間である. また, $B_i^{(i)}$; $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ は互いに独立なブラウン運動である.

さて, 時刻 t において区間 $[x, x+h) \equiv I_h^x$ の中に存在する粒子数を $n(t, I_h^x)$ とおくとこれは次のように表わせる；

$$n(t, I_h^x) = \#\{i; \tau_i < t, x_i^{(i)} \in I_h^x\} = \sum_{\tau_i < t} \chi_{I_h^x}(x_i^{(i)}).$$

ここで χ_A は集合 $A \subset \mathbf{R}$ の定義関数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

$x_i^{(i)}$ が確率過程として i 毎に互いに独立なことから, 一定条件の下で大数の法則により上式はその平均で近似できる. 即ち, 時刻 s における単位時間当りの排出量を $\lambda(s)$ とおくと

$$(2) \quad n(t, I_h^x) = \int_{-\infty}^t p(s, y_0; t, I_h^x) \lambda(s) ds$$

を得る. ここで $p(s, y_0; t, I_h^x)$ は, (1) を満たす粒子が時刻 s で地点 y_0 から排出されたとき, 時刻 t において I_h^x に属する遷移確率である. 従ってこれに対応する遷移確率密度が存在するとしてそれを $p(s, y_0; t, x)$ と表わすと, x における濃度は

$$(3) \quad n(t, x) = \int_{-\infty}^t p(s, y_0; t, x) \lambda(s) ds$$

である.

一般に, 時刻 s , 地点 y における単位時間長さ当り排出量を $\lambda(s, y)$ とおくと

$$(4) \quad n(t, x) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbf{R}} p(s, y; t, x) \lambda(s, y) ds dy$$

となる. (\mathbf{R}_y は変数 y の積分領域が \mathbf{R} であることを示す.) 或はこれと同等な表現として $s < t$ に対し

$$(5) \quad n(t, x) = \int_{\mathbf{R}} p(s, y; t, x) n(s, y) dy + \int_s^t \int_{\mathbf{R}} p(r, y; t, x) \lambda(r, y) dr dy$$

が得られる.

さらに, 遷移確率密度に対する Fokker-Planck 方程式より, $n(t, x)$ は次の拡散方程式

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{b^2(t, x)n(t, x)\} - \frac{\partial}{\partial x} \{a(t, x)n(t, x)\} + \lambda(t, x)$$

を満たす.

3. 媒体の揺らぎの影響

本節では、媒体に揺らぎがあったとき、それが濃度分布にどのように反映されるかを見る。前節において、分子拡散による揺らぎが大数の法則により互いに打ち消し合い、濃度としては滑らかな変動をする平均濃度（分子的スケールにおける平均を意味する）を考えればよく、その分子的揺らぎを考慮する必要がないのに対し、媒体速度の揺らぎは巨視的変動であって、その変動と同程度の時間尺度で物質粒子の変動を観察する限り、物質濃度についてその平均のみならず変動をも考慮する必要がある。

3.1. 単一のブラウン運動で媒体の揺らぎが生成される場合

まず簡単な場合として、媒体の揺らぎが単一のブラウン運動により生成される場合——即ち媒体の速度場の空間相関が1の場合——を扱う。このとき、前節に対応して第*i*粒子に対するモデルは次のようになる；

$$(7) \quad dx_t^{(i)} = \{a(t, x_t^{(i)})dt + c(t, x_t^{(i)})d\tilde{B}_t\} + b(t, x_t^{(i)})dB_t^{(i)}.$$

右辺 { } 内第一項が媒体の平均速度場、第二項がその揺らぎを表わす。 \tilde{B}_t は $\{B_t^{(i)}; i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ と独立なブラウン運動である。このとき、次の結果が得られる（証明は第5節に与える）；

定理 3.1.

濃度分布の満たす方程式は

$$(8) \quad dn(t, x) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x))n(t, x) \} - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x)n(t, x) \} + \lambda(t, x) \right] dt - \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x)n(t, x) \} d\tilde{B}_t$$

という確率偏微分方程式で与えられる。

第一項はトレンドの動きを、第二項はそのまわりの揺らぎを表わすことに注意する。図1に見られるように揺らぎの大きさに関係する $-\frac{\partial}{\partial x} \{ cn \} d\tilde{B}_t$ の項は媒体の揺らぎを直接反映して

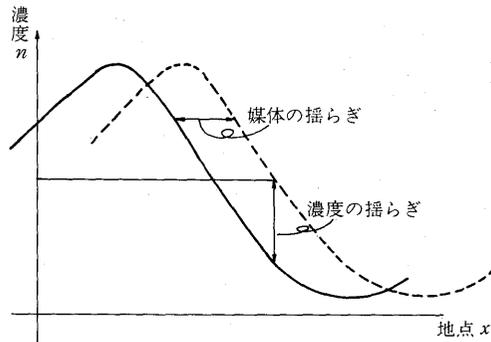


図1. 媒体の揺らぎと濃度の揺らぎ

いる。これよりまず、濃度分布変動のトレンド $m(t, x) = E[n(t, x)]$ に対して次のことが言える。

系 3.1.1.

$m(t, x)$ は良く知られた拡散方程式

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} m(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x)) m(t, x) \} - \{ a(t, x) m(t, x) \} + \lambda(t, x)$$

を満たす。即ち、拡散係数は分子拡散と乱流拡散の和、移流項は媒体の平均速度場が対応している。

さらに、濃度の空間的分散共分散構造の満たす式を求めておく。

$$x(t, x, y) \equiv E[n(t, x)n(t, y)] \quad t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}$$

とすると

$$\text{Cov}\{n(t, x), n(t, y)\} = x(t, x, y) - m(t, x)m(t, y)$$

であるが、これに関して次が言える。

系 3.1.2.

$x(t, x, y)$ は次式を満たす；

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t, x, y) = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x)) x(t, x, y) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (b^2(t, y) \\ & + c^2(t, y)) x(t, x, y) \} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{ c(t, x) c(t, y) x(t, x, y) \} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) x(t, x, y) \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ a(t, y) x(t, x, y) \} \\ & + \lambda(t, x) m(t, y) + \lambda(t, y) m(t, x). \end{aligned}$$

これと系 3.1.1 により、空間的分散共分散は求まる。二つの代表例について計算してみる。

例 1.

a, b, c は正定数, $\lambda \equiv 0$, $n(0, x) = \delta(x)$ (デルタ関数) とする。

このとき、 $t > 0$ に対して (9) より

$$m(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(b^2 + c^2)t}} \exp \left\{ -\frac{(x - at)^2}{2(b^2 + c^2)t} \right\}$$

また、 $x(t, x, y)$ に関しては (10) より

$$\begin{aligned} x(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi t \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - c^4}} \exp \left[-\frac{1}{2\{(b^2 + c^2)^2 - c^4\}t} \{ (b^2 + c^2)(x - at)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2c^2(x - at)(y - at) + (b^2 + c^2)(y - at)^2 \} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi t b \sqrt{b^2 + 2c^2}} \exp \left[-\frac{1}{4b^2(b^2 + 2c^2)t} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left\{ (b^2 + c^2) \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}at \right)^2 + (b^2 + 4c^2) \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

例2.

a, b, c は例1と同じく正定数とする.

$$\begin{aligned} n(0, n) &\equiv 0 & (-\infty < x < \infty) \\ \lambda(t, x) &= \delta(x) & (t > 0) \end{aligned}$$

のとき, $t \rightarrow \infty$ に対する極限状態を見る.

例1で求めた解を $m_1(t, x), x_1(t, x, y)$ とおくと, これらが例2のグリーン関数になっていることから, まず解 $m_2(\infty, x) \equiv m_2(x)$ は

$$m_2(x) = \int_0^\infty m_1(t, x) dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(b^2+c^2)t}} \exp\left\{-\frac{(x-at)^2}{2(b^2+c^2)t}\right\} dt$$

となる. 5節において示されるように, これはさらに

$$m_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (x \geq 0) \\ \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{2ax}{b^2+c^2}\right\} & (x < 0) \end{cases}$$

と表わされる.

また, $x_2(x, y)$ については

$$\begin{aligned} x_2(x, y) &= \int_0^t dt' \int_{R_v} dx' \int_{R_v} dy' x_1(t-t', x-x', y-y') \{ \lambda(x') m_2(y') + \lambda(y') m_2(x') \} \\ &= \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds' \int_{R_v} dx' \int_{R_v} dy' x_1(t', x-x', y-y') \{ \delta(x') m_1(s', y') \\ &\quad + \delta(y') m_1(s', x') \} \\ &\equiv x_2^{(1)}(x, y) + x_2^{(2)}(x, y) \end{aligned}$$

と書ける.

独立な二つの正規分布

$$N\left(\begin{pmatrix} at' \\ at' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b^2+c^2)t' & c^2t' \\ c^2t' & (b^2+c^2)t' \end{pmatrix}\right) \text{ と } N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ as' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (b^2+c^2)s' \end{pmatrix}\right)$$

表1. 空間的分散共分散 ($a=1, b^2=c^2=0.5$) $\text{Cov}\{n(t, x), n(t, y)\}$

5.00	-0.05	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.07	0.08	0.08
4.50	-0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08
4.00	-0.05	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.08	0.07
3.50	-0.04	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09	0.08	0.07
3.00	-0.04	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
2.50	-0.03	0.05	0.07	0.09	0.10	0.10	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04
2.00	-0.01	0.07	0.10	0.11	0.11	0.10	0.09	0.07	0.06	0.04	0.03
1.50	0.01	0.10	0.12	0.12	0.11	0.09	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02
1.00	0.04	0.13	0.14	0.12	0.10	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
0.50	0.09	0.16	0.13	0.10	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01
0.0	0.10	0.09	0.04	0.01	-0.01	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05
$y \backslash x$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

表2. 空間的相関 $\text{Corr}\{n(t, x), n(t, y)\}$

5.00	-0.62	0.08	0.14	0.23	0.35	0.49	0.65	0.79	0.90	0.98	1.00
4.50	-0.58	0.11	0.19	0.31	0.45	0.62	0.77	0.89	0.97	1.00	0.98
4.00	-0.52	0.15	0.26	0.41	0.58	0.74	0.88	0.97	1.00	0.97	0.90
3.50	-0.46	0.22	0.36	0.53	0.71	0.87	0.97	1.00	0.97	0.89	0.79
3.00	-0.37	0.30	0.47	0.67	0.85	0.96	1.00	0.97	0.88	0.77	0.65
2.50	-0.26	0.40	0.62	0.82	0.95	1.00	0.96	0.87	0.74	0.62	0.49
2.00	-0.10	0.54	0.78	0.94	1.00	0.95	0.85	0.71	0.58	0.45	0.35
1.50	0.10	0.72	0.93	1.00	0.94	0.82	0.67	0.53	0.41	0.31	0.23
1.00	0.38	0.90	1.00	0.93	0.78	0.62	0.47	0.36	0.26	0.19	0.14
0.50	0.73	1.00	0.90	0.72	0.54	0.40	0.30	0.22	0.15	0.11	0.08
0.0	1.00	0.73	0.38	0.10	-0.10	-0.26	-0.37	-0.46	-0.52	-0.58	-0.62
$y \backslash x$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

の和を考えることにより, $x_2^{(1)}(x, y)$ は

$$x_2^{(1)}(x, y) = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds' \frac{1}{2\pi \sqrt{\{(b^2+c^2)^2(t'+s')-c^4t'\}t'}} \cdot \exp \left[-\frac{(b^2+c^2)\{(t'+s')(x-at')^2+t'(y-a(t'+s'))^2\}-2c^2t'(x-at')(y-a(t'+s'))}{2\{(b^2+c^2)^2(t'+s')-c^4t'\}t'} \right]$$

と整理される. $x_2^{(2)}(x, y) = x_2^{(1)}(y, x)$ である.

$a=1, b^2=c^2=0.5$ として数値計算した結果を表1, 表2に示す.

表1より, $x \geq 0$ における分散は湧き出し源を離れるにつれ初めは大きくなるが, その後なだらかに減少していることがわかる.

3.2. 媒体の空間相関を考慮に入れた場合

さらに一般に, 媒体速度の空間相関まで考慮に入れたモデルは

$$(11) \quad dx^{(i)} = \{a(t, x^{(i)})dt + \int_{R_n} c(t, x^{(i)}, y) \tilde{B}(dt, dy)\} + b(t, x^{(i)})dB^{(i)}$$

として与えられる. ここで $\tilde{B}(dt, dy)$ は次の性質をもつブラウン測度である;

任意の k 個の区間 $F_1 = I_1 \times J_1, \dots, F_k = I_k \times J_k \subset \mathbf{R}^2$ に対して

(i) $(\tilde{B}(F_1), \dots, \tilde{B}(F_k))'$ は平均0の k 次元正規分布をなす.

(ii) それらが互いに素なら, 上記確率変数の各成分は互いに独立で, $\text{Var}\{\tilde{B}(F_j)\} = \mu(F_j)$ $j = 1, \dots, k$. 但し, μ はルベグ測度である.

ところで, (11)式によりあらゆる分散共分散構造をもつ媒体の揺らぎがモデル化されることに注意しておく. それは,

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left[\int_s^t \int_{R_n} c(r_1, x_1, y_1) \tilde{B}(dr_1, dy_1), \int_s^t \int_{R_n} c(r_2, x_2, y_2) \tilde{B}(dr_2, dy_2) \right] \\ &= \int_s^t \int_{R_n} c(r, x_1, y) c(r, x_2, y) dr dy \end{aligned}$$

なる関係に基くが, $c(t, x, y)$ の決定が有限次元における分散共分散行列 Σ の HH' の形への分解に対応しているのである.

このとき, 定理3.1に対応して次が言える;

定理 3.2.

(11) に基づく濃度分布は次式を満たす.

$$(12) \quad dn(t, x) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + \int_{R_z} c^2(t, x, z) dz) n(t, x) \} - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) n(t, x) \} \right. \\ \left. + \lambda(t, x) \right] dt - \int_{R_y} \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x, y) n(t, x) \} \bar{B}(dt, dy).$$

また, 系 3.1.1 系 3.1.2 に対しては次が成立つ;

系 3.2.1.

平均濃度 $m(t, x)$ について次式が成立つ.

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} m(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + \int_{R_z} c^2(t, x, z) dz) m(t, x) \} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) m(t, x) \} + \lambda(t, x)$$

系 3.2.2.

$x(t, x, y) = E[n(t, x)n(t, y)]$ に対して次式が成立する;

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial t} x(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + \int_{R_z} c^2(t, x, z) dz) x(t, x, y) \} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (b^2(t, y) + \int_{R_z} c^2(t, y, z) dz) x(t, x, y) \} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{ (\int_{R_z} c(t, x, z) c(t, y, z) dz) x(t, x, y) \} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) x(t, x, y) \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ a(t, y) x(t, x, y) \} \\ + \lambda(t, x) m(t, y) + \lambda(t, y) m(t, x).$$

$\int_{R_z} c(t, x, z) c(t, y, z) dz$ は, 時刻 t における媒体の単位時間当りの揺らぎの地点 x, y 間の共分散であることに注意する.

4. 湧き出しの揺らぎ

これまでは湧き出し源における粒子の排出量は揺らぎは無いものとしてきたが, 本節においてこの揺らぎも考慮したモデルを扱う. 即ち, 対応するモデルは

$$(15) \quad \begin{cases} dx^{(i)} = \{ a(t, x^{(i)}) dt + \int_{R_y} c(t, x^{(i)}, y) \bar{B}(dt, dy) \} + b(t, x^{(i)}) dB_t^{(i)} \\ d\lambda(t, x) = \mu_0(t, x) dt + \int_{R_y} \mu_1(t, x, y) B(dt, dy) \end{cases}$$

で表わされる. ここで, $\{B_t^{(i)}; i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $\{\bar{B}(dt, dy)\}$, $\{B(dt, dy)\}$ は互いに独立. このとき,

$$\begin{aligned}\lambda_0(t, x) &= E[\lambda(t, x)] \\ \eta(t, x, y) &= E[\lambda(t, x)n(t, y)] \\ \xi(t, x, y) &= E[\lambda(t, x)\lambda(t, y)]\end{aligned}$$

とおくと、平均および分散共分散に関して次が言える。

定理 4.1.

モデル (15) の下で、平均と分散共分散は次の対程式系を満たす。

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t, x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b(t, x) + \int_{R_z} c^2(t, x, z) dz) m(t, x) \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) m(t, x) \} + \lambda_0(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} \lambda_0(t, x) &= \mu_0(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t, x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + \int_{R_z} c^2(t, x, z) dz) x(t, x, y) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (b^2(t, y) + \int_{R_z} c^2(t, y, z) dz) x(t, x, y) \} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{ (\int_{R_z} c(t, x, z) c(t, y, z) dz) x(t, x, y) \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) x(t, x, y) \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ a(t, y) x(t, x, y) \} \\ &\quad + \eta(t, x, y) + \eta(t, y, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, y) + \int_{R_z} c^2(t, y, z) dz) \eta(t, x, y) \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \{ a(t, y) \eta(t, x, y) \} + \mu_0(t, x) m(t, y) + \xi(t, x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, x, y) &= \lambda_0(t, x) \mu_0(t, y) + \mu_0(t, x) \lambda_0(t, y) \\ &\quad + \int_{R_z} \mu_1(t, x, z) \mu_1(t, y, z) dz \end{aligned} \right.$$

5. 3.1 節および 3.2 節の証明

分子拡散による揺らぎを表現する確率空間を Ω_1 、媒体の揺らぎを表わす空間を Ω_2 とし、その上の部分 σ -集合体 $\mathcal{F}_t \equiv \sigma(B_s^{(i)}; s \leq t, i = \dots, -1, 0, 1, \dots)$, $\mathcal{G}_t \equiv \sigma(\bar{B}_s; s \leq t)$ を定義する。 \mathcal{F}_t は分子拡散の時刻 t までの情報であり、 \mathcal{G}_t は媒体の揺らぎの時刻 t までの情報である。分子拡散と乱流拡散は独立故、対象とする確率空間としては Ω_1 と Ω_2 の直積空間を考えれば良い。その代表元を $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ で表わすと、(7) は

$$(7) \quad dx^{(i)}(\omega) = \{ a(t, x^{(i)}(\omega)) dt + c(t, x^{(i)}(\omega)) d\bar{B}_t(\omega_2) + b(t, x^{(i)}(\omega)) dB_t^{(i)}(\omega_1) \}$$

となる。

いま、媒体の速度場に関する情報はすべて既知としたときの分子運動の時刻 t までの情報は $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_\infty$ で与えられるが、このときの遷移確率（以下、条件付遷移確率と呼ぶ）を

$$p(s, y; t, x; \omega_2) dx \equiv p(x^{(i)} \in [x, x + dx] | x_s^{(i)} = y, \mathcal{F}_s)$$

と表わせば、媒体の動きが既知の下では第2節の議論がすべて成立し、(5)式が得られる。即ち、 $s < t$ に対し

$$(5) \quad n(t, x) = \int_{R_s} p(s, y; t, x; \omega_2) n(s, y) dy + \int_s^t \int_{R_r} p(r, y; t, x; \omega_2) \lambda(r, y) dr dy.$$

ところで、この条件付遷移確率密度 $p(s, y; t, x; \omega_2)$ に関して次の補題が成立する。

補題

$s < t$ に対して、 $p(s, y; t, x; \omega_2)$ は次の確率偏微分方程式を満たす；

$$(17) \quad dp(s, y; t, x; \omega_2) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x)) p(s, y; t, x; \omega_2) \} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) p(s, y; t, x; \omega_2) \} \right] dt \\ - \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x) p(s, y; t, x; \omega_2) \} d\tilde{B}_t.$$

証明

任意の C^2 関数 f に対して、伊藤の公式から

$$f(x_t^{(i)}) - f(x_s^{(i)}) \\ = \int_s^t \frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) dx_r^{(i)} + \int_s^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_r^{(i)}) d\langle x^{(i)} \rangle_r \\ = \int_s^t \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_r^{(i)}) \right) (b^2(r, x_r^{(i)}) + c^2(r, x_r^{(i)})) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) \right) a(r, x_r^{(i)}) \right\} dr \\ + \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) \right) b(r, x_r^{(i)}) dB_r^{(i)} + \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) \right) c(r, x_r^{(i)}) d\tilde{B}_r$$

を得る。

辺々 \mathcal{F}_s で条件付平均をとると

$$E[f(x_t^{(i)}) | \mathcal{F}_s] - f(x_s^{(i)}) \\ = \int_s^t E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_r^{(i)}) \right) (b^2(r, x_r^{(i)}) + c^2(r, x_r^{(i)})) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) \right) a(r, x_r^{(i)}) \mid \mathcal{F}_s \right] dr \\ + \int_s^t E \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_r^{(i)}) \right) c(r, x_r^{(i)}) \mid \mathcal{F}_s \right] d\tilde{B}_r$$

となる。

$x_s^{(i)} = y$ という下で条件付推移確率を使って表現すると、これは

$$\int_{R_s} f(x) p(s, y; t, x; \omega_2) dx - f(y) \\ = \int_s^t \int_{R_r} \left\{ \frac{1}{2} (b^2(r, x) + c^2(r, x)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + a(r, x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right\} p(s, y; r, x; \omega_2) dx dr \\ + \int_s^t \int_{R_r} \left\{ c(r, x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right\} p(s, y; r, x; \omega_2) dx d\tilde{B}_r$$

となる。部分積分により (17) を得る。

証終

これから直ちに (8) を得る。即ち、

定理 3.1. の証明

補題より, (5)において次が成立する.

$$\begin{aligned} \text{第一項} &= \int_{\mathbf{R}_v} \left[p(s, y; s, x; \omega_2) + \int_s^t \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(r, x) + c^2(r, x)) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. p(s, y; r, x; \omega_2) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(r, x) p(s, y; r, x; \omega_2) \} \right] dr \\ &\quad - \int_s^t \frac{\partial}{\partial x} \{ c(r, x) p(s, y; r, x; \omega_2) \} d\tilde{B}_r \Big] n(s, y) dy. \end{aligned}$$

$p(s, y; s, x; \omega_2) = \delta(y-x)$ に注意すると, フビニの定理からこれはさらに

$$\begin{aligned} &= n(s, x) + \int_s^t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(r, x) + c^2(r, x)) \int_{\mathbf{R}_v} p(s, y; r, x; \omega_2) n(s, y) dy \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(r, x) \int_{\mathbf{R}_v} p(s, y; r, x; \omega_2) n(s, y) dy \} \right] dr \\ &\quad - \int_s^t \frac{\partial}{\partial x} \{ c(r, x) \int_{\mathbf{R}_v} p(s, y; r, x; \omega_2) n(s, y) dy \} d\tilde{B}_r \end{aligned}$$

となる.

一方第二項に関しては

$$\begin{aligned} \text{第二項} &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}_v} \left[p(r, y; r, x; \omega_2) \right. \\ &\quad + \int_r^t \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(u, x) + c^2(u, x)) p(r, y; u, x; \omega_2) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(u, x) p(r, y; u, x; \omega_2) \} \right\} du \\ &\quad \left. - \int_r^t \frac{\partial}{\partial x} \{ c(u, x) p(r, y; u, x; \omega_2) \} d\tilde{B}_u \right] \lambda(r, y) dr dy \\ &= \int_s^t \left[\lambda(r, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(u, x) + c^2(u, x)) \int_s^u \int_{\mathbf{R}_v} p(r, y; u, x; \omega_2) \right. \\ &\quad \left. \lambda(r, y) dr dy \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(u, x) \int_s^u \int_{\mathbf{R}_v} p(r, y; u, x; \omega_2) \lambda(r, y) dr dy \} \right] du \\ &\quad - \int_s^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ c(u, x) \int_{\mathbf{R}_v} p(r, y; u, x; \omega_2) \lambda(r, y) dr dy \} \right] d\tilde{B}_u \end{aligned}$$

を得る. 再び (5) 式を使って整理することにより証明は終わる.

証終

この系として得られる (9), (10) のうち前者は明らか故, (10) のみを示しておく.

系 3.1.2 の証明

再び伊藤の公式より

$$\begin{aligned} &d\{n(t, x)n(t, y)\} \\ &= n(t, x)dn(t, y) + n(t, y)dn(t, x) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\langle n(\cdot, x), n(\cdot, y) \rangle_t \\ &= n(t, x) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (b^2(t, y) + c^2(t, y)) n(t, y) \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ a(t, y) n(t, y) \} + \lambda(t, y) \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n(t, y) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x)) n(t, x) \} - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x) n(t, x) \} + \lambda(t, x) \right] dt \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x) n(t, x) \} \frac{\partial}{\partial y} \{ c(t, y) n(t, y) \} dt - n(t, x) \frac{\partial}{\partial y} \{ c(t, y) n(t, y) \} d\bar{B}_t \\
 & - n(t, y) \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x) n(t, x) \} d\bar{B}_t
 \end{aligned}$$

となるが、辺々平均をとれば(10)を得る。

証終

例2における

$$m_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (x \geq 0) \\ \frac{1}{a} \exp \left\{ \frac{2ax}{b^2 + c^2} \right\} & (x < 0) \end{cases}$$

の証明

i) $\frac{1}{a}$ ($x \geq 0$) について

$$\begin{cases} m_2(0) = \frac{1}{a} \\ \frac{d}{dx} m_2(x) = 0 \quad (x > 0) \end{cases}$$

を言えば良い。

まず変数変換により

$$m_2(0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(b^2 + c^2)t}} e^{-\frac{a^2 t}{2(b^2 + c^2)}} dt = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a}.$$

また, $\frac{d}{dx} m_2(x)$ を

$$\frac{d}{dx} m_2(x) = \left(\int_a^x + \int_x^\infty \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(b^2 + c^2)t}} \frac{at - x}{(b^2 + c^2)t} e^{-\frac{(x-at)^2}{2(b^2 + c^2)t}} at \equiv I_1 + I_2$$

と分解して I_2 については $t = \frac{x^2}{a^2 s}$ と変数変換すると,

$$I_2 = - \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(b^2 + c^2) \frac{x^2}{a^2 s}}} \frac{a \frac{x^2}{a^2 s} - x}{(b^2 + c^2) \frac{x^2}{a^2 s}} e^{-\frac{(x-ax)^2}{2(b^2 + c^2)s}} \frac{x^2}{a^2 s^2} ds = -I_1$$

となり, $\frac{d}{dx} m_2(x) = 0$ ($x > 0$) が示された。

ii) $m_2(x) = \frac{1}{a} \exp \left\{ \frac{2ax}{b^2 + c^2} \right\}$ ($x < 0$) について

(9)より, $x < 0$ において

$$\begin{cases} -a \frac{d}{dx} m_2(x) + \frac{1}{2} (b^2 + c^2) \frac{d^2}{dx^2} m_2(x) = 0 \\ m_2(-0) = \frac{1}{a} \\ m_2(-\infty) = 0 \end{cases}$$

を解くことにより得られる。

これが超関数の意味で(9)の定常解になっていることは容易に確かめられる。 証終

謝 辞

適切な助言を与えて下さった岡崎卓氏と査読者に感謝します。特に例2に関しては、この方々のご意見を下に大幅に書き改められました。また、五味一、高野学の両氏には数値計算の補助をして頂きました。ここに謝意を表したいと思います。

参 考 文 献

- Gifford, F.A. (1959). Statistical properties of a fluctuating plume model, *Proceedings of Symposium on Atmospheric Diffusion and Air Pollution, Advances in Geophysics*, **6**, 117-137.
- Ikeda, N. and Watanabe, S. (1981). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland/Kodansha, New York/Tokyo.
- Hinze, J.O. (1975). *Turbulence*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.
- Krylov, N.V. and Rozovskii, B.L. (1977). On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations, *Math. USSR-Izv.*, **11**, 1267-1284.
- Omatsu, S. and Seinfeld, J.H. (1981). Filtering and smoothing for linear discrete-time distributed parameter systems based on Wiener-Hopf theory with application to equation of air pollution, *IEEE, Trans. on System and Cybernetics*, SMC-11, No. 12, 785-801.
- Pasquill, F. (1974). *Atmospheric Diffusion*, 2nd ed., Ellis Horwood, Chichester.
- Rozovskii, B.L. (1975). On stochastic partial differential equations, *Math. USSR-Sb.*, **25**, 295-322.
- Seinfeld, J.H. and Chen, W.H. (1971). Estimation of parameters in partial differential equations from noisy experimental data, *Chemical Engineering Science*, **26**, 753-766.

Diffusion in Fluctuating Media

Hirohisa Kishino

(The Institute of Statistical Mathematics)

Masasi Ito

(Tokyo Metropolitan Research Institute of Environmental Pollution)

Kazuo Noda and Nobuhisa Kashiwagi

(The Institute of Statistical Mathematics)

In this paper, expressing the movement of particles in fluctuating media in the form of the stochastic differential equation, we get the stochastic partial differential equation representing the time-spatio variation of their concentration.

We study the movement of particles expressed in the following form ;

$$(1) \quad dx_i^{(i)} = \{a(t, x_i^{(i)})dt + c(t, x_i^{(i)})d\bar{B}_i\} + b(t, x_i^{(i)})dB_i^{(i)} \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Here, $\{\bar{B}_i, B_i^{(i)}; i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ are Brownian motions independent to each other. From this, we get the following stochastic partial differential equation for the concentration of the particles $n(t, x)$;

$$(2) \quad dn(t, x) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (b^2(t, x) + c^2(t, x))n(t, x) \} - \frac{\partial}{\partial x} \{ a(t, x)n(t, x) \} + \lambda(t, x) \right] dt - \frac{\partial}{\partial x} \{ c(t, x)n(t, x) \} d\bar{B}_t,$$

where $\lambda(t, x)$ is the emission rate.

The fact that the fluctuation of the concentration is expressed as the spatial differential of the fluctuation of the wind multiplied by the concentration level, which is seen in (2), is a new information. This means the instantwise validity of Fick's law.

From (2), we can also get the equation for the spatial correlation of the concentration.