式として $d^{-\alpha(k)}$ を得た．2から17までの d についての計算機実験より，d を固定した場合，k が偶数であれば分散が大であり，奇数であれば分散が小であるという結果が得られた（Itoh and Solomon (1985))．$k=2$ の場合を考える．$\sum_{i=1}^{d} x_i=m$ なる平面上では点相互の距離は2以上である．m が偶数であるような平面を考え，それぞれの平面上の点をすべて考える．このような点についても相互の距離は2以上である．これは規則的充塡であり，充塡率は次元によらず1/2である．これについての1次元モデルを考える．点には白と黒の2種類あり，白と白，あるいは黒と黒はとなりあうことができるが，白と黒相互の距離は d 以上でなければならない．これについてのランダムパッキングも興味ある問題であり，この場合は解析的な議論が可能である．

Golay code は $2^{12}=4096$ の点よりなるが上記ランダムパッキングによる $X(24,8)$ は5回の実験についての平均値が306.6であった．Golay code の各点から他の点への距離は8, 12, 16, 24のいずれかであり，それぞれに759, 2576, 759,, 1の個数の点が対応している．これは Golay code にもとづく点の配置は非常に高い対称性を持つことを示す．逆に相互の Hamming 距離は8, 12, 16, 24のいずれかであるという制約のもとでのランダムパッキングを考える．計算機実験の結果，1300～1500なる個数が得られる場合と700～800なる個数が得られる場合が多く，4096とう結果が得られたこともあった．どの場合になるかは最初につめられた数個の点の相互の配置により定まるものと思われる．

参考文献

Itoh, Y. and Solomon, H., Random sequential coding by Hamming distance, *J. Appl. Prob*., 発表予定

射影子法による乱流の近似理論

岡　崎　　卓

乱流は流体の不規則運動であって，揺動する流体の平均速度や速度相関などの統計量を支配する方程式を見出し，流体物性や境界条件に応じてその解を求め予測することは乱流理論の重要課題である．近年盛んに行なわれるようになった乱流のシミュレーションにおいても，計算格子点間の微細現象を拾い上げ，格子点に還元するため矢張り統計量の方程式を必要とする．この10年間に乱流理論は目覚ましい展開を見せ，速度相関を定める高精度の近似理論（DI 近似等）が現われた．しかしこの理論は複雑に過ぎて，特殊な流れには有効であるが，円管流など実際の乱流には適用し難い．勿論，乱流モデルと呼ばれる現象論的方程式が多数提案され実用計算に供されているが，流体の運動法則と確率論とから演繹されたものでなく，アドホックな仮定や非理論的定数を含むという難点がある．

現実の乱流に適用可能な程度に簡明な構造を有し，非理論的定数を含まぬ方程式の導出が望まれているのであるが，この問題を困難にしている最大の原因は速度の時間変化が速度の2次の積に依存し，2次の積の時間変化は3次の積に依存するという運動方程式の非線型性にある．そこで速度に依存する諸量の時間的発展を考える際，各量をそのまま取扱うのでなく，2次の関数で表現される部分にのみ注目し，その部分の時間発展を追うことにすれば，非線型性の困難は自動的に回避されるであろう．即わち速度 u の任意関数 $F(u)$ を2次関数におとす射影子 p

$$pF(u)=c_0+c_1u+c_2uu$$

を導入し，$F(u)$ ではなく係数 c_0～c_2 の変化を考察するわけである．射影子法は元来統計力学の分野で，物質を構成する多数の粒子の集団としての性質を抽出するために開発されたものであり，乱流に応用するには流体の連続性を考慮する必要があるが，ほぼ同様の論法を展開することができる．

射影子 p として具体的に

$$pF(u)\equiv t_r\{\bar{\rho}F\}+\int dx[u(x)-U(x)]t_r\left\{\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial U(x)}F\right\}$$
$$+\int dxdy[v(x)v(y)-h(xy)]t_r\left\{\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial h(xy)}F\right\}$$

[$u(x)$: 位置 x における速度，U: 平均速度，$v=u-U$，$h(xy)$: 2次速度相関，
$\bar{\rho}=\bar{\rho}(u)$: 仮りの確率密度，$\bar{\rho}=\mathrm{const}\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\int dxdy\ v(x)h^{-1}(xy)v(y)\right]$，
$t_r\{\cdots\}=\int\cdots\delta u(\cdot)$（$u$ 空間の汎関数積分）]

と設定すれば，平均速度と2次速度相関を定める閉じた方程式系が構成される．複雑な形式的表現を繰込み近似によって具体的に表わした結果は前記 DI 近似の方程式と類似の構造をもつが，同時刻相関によって記述されている点で格段に取扱い易い形となっている．

モデル選択による二相回帰曲線の推定の安定性

野 田 一 雄

伊藤政志（都公害研）との共同研究として表記の研究を継続している．

いま，変化点 ${}_0\theta$ が区間 $I_m(=[x_m,\ x_{m+1}])$ 内にあるとして，二相回帰モデル M_m を次のように設定する：

$$y_i=\tau(x_i,\ \boldsymbol{\theta})+e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ l),$$
$$\tau(x_i,\ \boldsymbol{\theta})=\begin{cases}\tau_1(x_i,\ \boldsymbol{\theta}) & (i=1,\ 2,\ \dots,\ m),\\ \tau_2(x_i,\ \boldsymbol{\theta}) & (i=m+1,\ \dots,\ l),\end{cases}$$
$$\begin{cases}\tau_1(x_i,\ \boldsymbol{\theta})=\theta_0+\theta_1(x_i-{}_0\theta)+\cdots+\theta_p(x_i-{}_0\theta)^p,\\ \tau_2(x_i,\ \boldsymbol{\theta})=\theta_0+\theta_1'(x_i-{}_0\theta)+\cdots+\theta_q'(x_i-{}_0\theta)^q,\end{cases}$$

ただし，$x_1\leqq\cdots\leqq x_l$，$e_i\sim N(0,\ \sigma^2)$, i. i. d.

このモデル族 $\{M_m\}$ からのモデル選択として，モデルにおけるパラメータの"真値"$(\boldsymbol{\theta}^*,\ \sigma^*)$ の最小 AIC 推定量 $(\hat{\boldsymbol{\theta}},\ \hat{\sigma})$ が求められる．

この推定（およびモデル選択）の安定性として，Kullback-Leibler 情報量により定められる最適なモデル M^*（いまこれを $M_{\underset{\cdot}{m}}$ とする）を $(\hat{\boldsymbol{\theta}},\ \hat{\sigma})$ が選択する確率の大きさを normalize したものをもって定義する．この確率は，$p,\ q\leqq 1$ の場合，漸近的には

$$\Phi\left(\frac{x_{m+1}-{}_0\theta^*}{\bar{V}({}_0\hat{\theta})}\right)-\Phi\left(\frac{x_m-{}_0\theta^*}{\bar{V}({}_0\hat{\theta})}\right)$$

として表される．ただし，$\bar{V}({}_0\hat{\theta})$ は ${}_0\hat{\theta}$ の漸近分散で次式により表される：

$$\bar{V}({}_0\hat{\theta})=\frac{\sigma^{*2}}{(\theta_1^*-\theta_1'^*)^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l-m}+\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}\right),$$
$${}_1\bar{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i, \qquad {}_2\bar{x}=\frac{1}{l-m}\sum_{i=m+1}^{l}x_i$$
$$u_1=({}_1\bar{x}-{}_0\theta^*)^2, \qquad u_2=({}_2\bar{x}-{}_0\theta^*)^2,$$
$$v_1=\sum_{i=1}^{m}(x_i-{}_1\bar{x})^2, \qquad v_2=\sum_{i=m+1}^{l}(x_i-{}_2\bar{x})^2.$$

この間，この推定の安定性を，$\bar{V}({}_0\hat{\theta})$ を指標として，小標本によるシミュレーションによって調べてきた．その結果，安定性が $\bar{V}({}_0\hat{\theta})$ によって説明される場合とそれが困難である場合とがあることがわかった．

後者の解決のために，${}_0\hat{\theta}$ の exact な分布の分散の二次近似 $V_2({}_0\hat{\theta})$（ならびに ${}_0\hat{\theta}$ の偏り）を求めた．