

極端紫外光データによる地球周辺のプラズマ分布の推定

中野 慎也 モデリング研究系・データ同化研究開発センター 助教

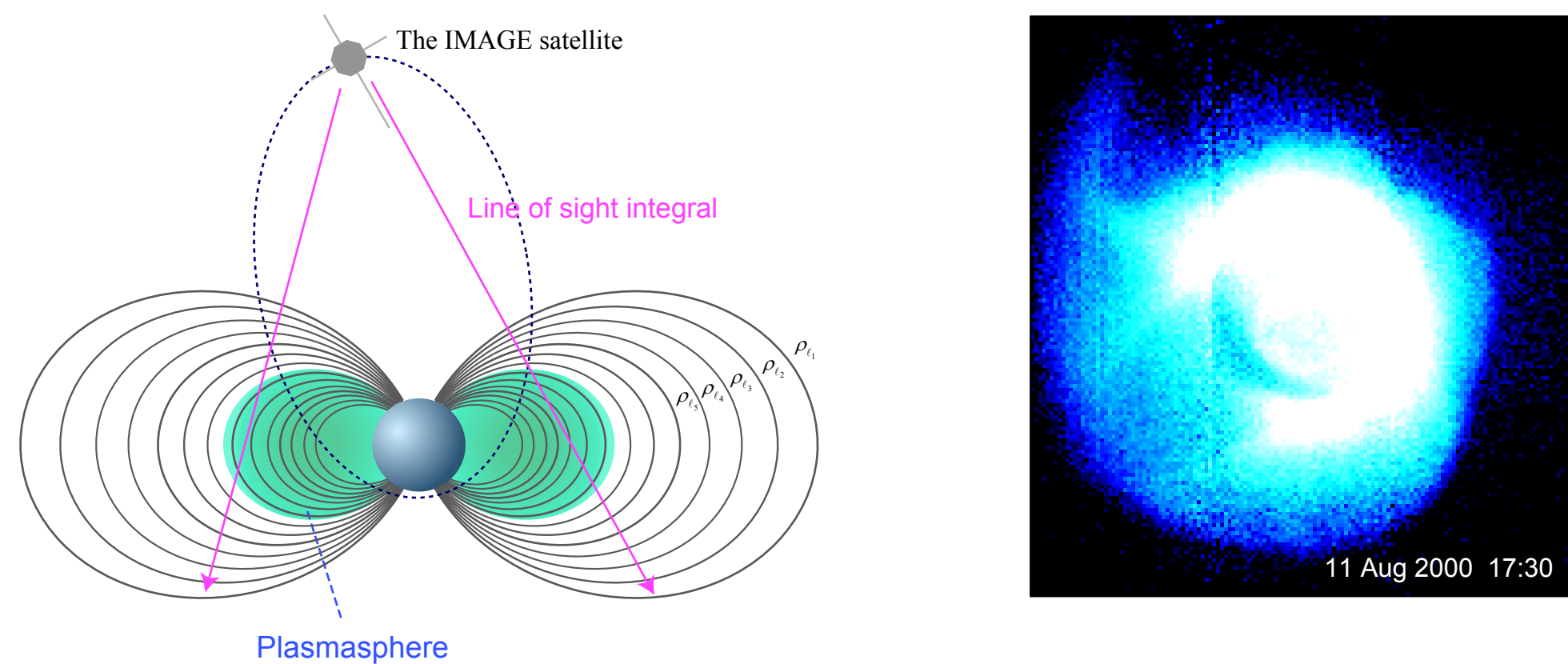
EUV observation

宇宙空間は、プラズマと呼ばれる電荷を持った粒子を含む気体で満たされている。特に地球周辺には、地球大気が電離してできた比較的密度の高いプラズマが取り巻いている。

人工衛星 IMAGE で得られた極端紫外光 (extreme ultraviolet; EUV) 画像は、この地球周辺のプラズマを撮影したもので、プラズマに含まれるヘリウムイオン (He+) からの共鳴散乱光 (波長 30.4 nm) の写真である。

我々は、この極端紫外光画像データを物理モデルに同化し、地球周辺のプラズマ密度分布の時間変化を推定しようと試みている。

* This work is in collaboration with Drs. Mei-Ching Fok (NASA/GSFC) and Pontus C:son Brandt (Johns Hopkins Univ.).



EUV imaging data provide information of line-of-sight integral of He+ density.

An example of an ultraviolet image of the plasmasphere (IMAGE/EUV). This image is generated using the data provided by University of Arizona.

Linear inversion

衛星で観測される極端紫外光画像の各画素の値 F_{obs} は、その画素の視線上の各点で散乱される極端紫外光を

$$F_{obs} = \int_L \xi \rho ds$$

のように積分すれば得られる (上図参照)。ここで、 ρ はその場所のプラズマ密度、 ξ は単位プラズマ密度あたりの散乱紫外光量である。

この積分を

$$\begin{pmatrix} F_{obs,1} \\ \vdots \\ F_{obs,K} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \xi \Delta s_{11} & \cdots & \xi \Delta s_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi \Delta s_{K1} & \cdots & \xi \Delta s_{KJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_J \end{pmatrix}$$

のように離散化し、さらにこれを

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{H}\mathbf{x}$$

のように書き表すことにすると、

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \rightarrow \min.$$

のような問題を解けば、各点のプラズマ密度分布が推定できる。但し、 \mathbf{P} は拘束条件を定める正定値行列。

Plasmasphere model

プラズマ圏のプラズマ密度分布 \bar{N} の時間発展は、以下の方程式で記述する。

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} - \frac{\nabla \Phi \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{x}} = f \quad \begin{array}{l} \Phi: \text{Electric potential} \\ \mathbf{B}: \text{Magnetic field} \end{array}$$

磁場 \mathbf{B} は地球内部起源の磁場でほぼ決まるので、地球双極子磁場のモデルで与えることができる。電位 (電場ポテンシャル) Φ については

$$\Phi = \Phi_0 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 \sin \phi + \sum_{n,j} a_{nj} \mathcal{J}_n \left(\xi_{nj} \frac{r}{R} \right) \cos n\phi + \sum_{n,j} b_{nj} \mathcal{J}_n \left(\xi_{nj} \frac{r}{R} \right) \sin n\phi \right]$$

の形で与えられるものとする。但し、 r は赤道面上の地球中心からの距離、 R はシミュレーション領域の半径、 \mathcal{J}_n は n 次の Bessel 関数、 ξ_{nj} は $\mathcal{J}_n(\xi_{nj}) = 0$ の j 番目の根。電位パラメータ Φ_0, a_{nj}, b_{nj} は、データ同化によって推定される。

Ensemble transform Kalman filter

Ensemble transform Kalman filter (ETKF) では、以下のようにアンサンブル平均からの差分を考える：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)} &= \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \delta \mathbf{y}_{k|k-1}^{(i)} &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}) - \overline{\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_{k|k-1})}. \end{aligned}$$

但し、 $\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ は全粒子のアンサンブル平均、関数 \mathbf{h}_k は、状態 \mathbf{x}_k が与えられた下での観測の期待値

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = \int \mathbf{y} \cdot p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) d\mathbf{y}$$

で、 $\overline{\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_{k|k-1})}$ はそのアンサンブル平均である。更に、次の行列を定義する：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k|k-1} &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_{k|k-1}^{(1)} & \cdots & \delta \mathbf{x}_{k|k-1}^{(N)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y}_{k|k-1} &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}_{k|k-1}^{(1)} & \cdots & \delta \mathbf{y}_{k|k-1}^{(N)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

行列 $\mathbf{X}_{k|k-1}$ を用いると分散共分散行列は、

$$\mathbf{V}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1}^T$$

のように表現できる。

ETKF では、フィルタ分布の平均ベクトルを

$$\bar{\mathbf{x}}_{k|k} = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1})),$$

分散共分散行列の平方根を

$$\mathbf{X}_{k|k} = \mathbf{X}_{k|k-1} \mathbf{T}_k$$

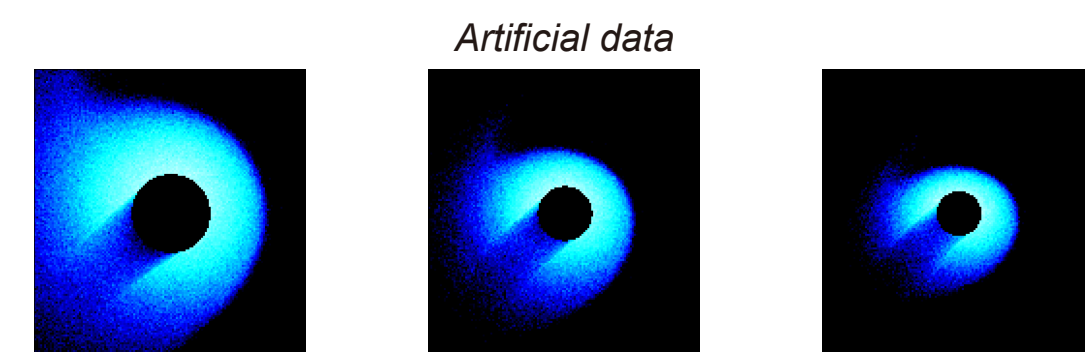
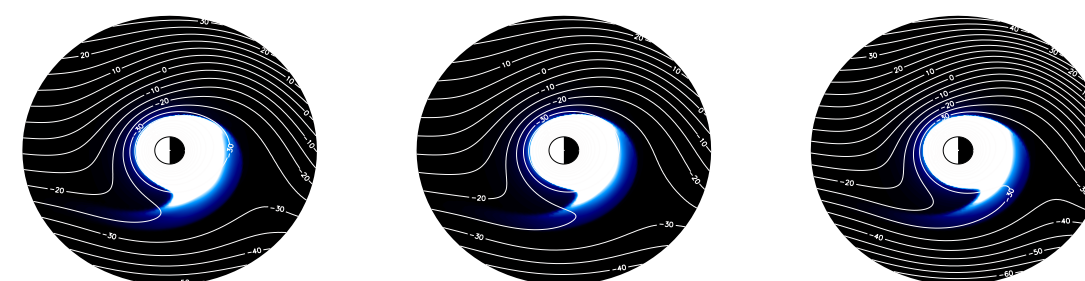
のように計算する。行列 $\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k$ は、 $\mathbf{Y}_{k|k-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}_{k|k-1}^T$ の固有値分解 $\mathbf{Y}_{k|k-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}_{k|k-1}^T = \mathbf{U}_k \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}_k^T$ を利用して、

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{X}_{k|k-1} \mathbf{U}_k (\mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda}_k)^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{Y}_{k|k-1}^T \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{T}_k &= \mathbf{U}_k (\mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda}_k)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_k^T \end{aligned}$$

のように計算する。

Experiment using artificial data

The run for generating the artificial data



Estimate

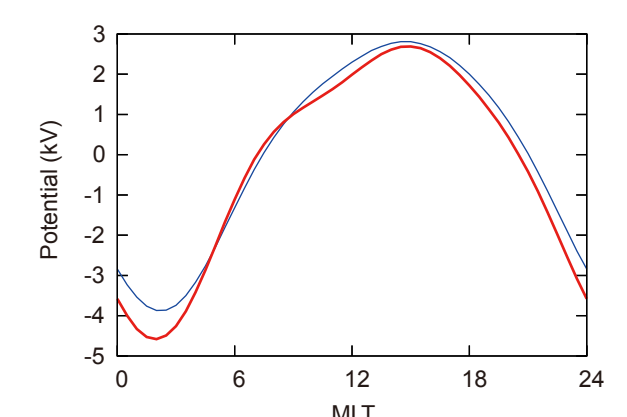


11 Aug 2000 1730 UT
(Initial state)

11 Aug 2000 1900 UT

11 Aug 2000 2100 UT

適当な条件の下で実行したシミュレーションから生成した人工データを用いて、推定がうまくいくかどうかを確認している。プラズマ密度分布、電位分布とも概ね推定できていると言える。



Estimate

最後に 2000 年 8 月 11 日の実際のデータを用いて推定した結果を示す。

