

Lee-Carterモデルの残差構造の解析とモデリング

井川 孝之 総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士後期課程3年

1. はじめに

1990年代前半に開発されたLee-Carter(LC)モデルは国際的に死亡率推計やリスク評価等に用いられている。LCモデルを日本の死亡率へ適用すると、年齢別対数死亡率の残差には時系列相関が認められ、年齢と時代(期間)を軸にとった残差局面にはうねりのようなものが観察される。ここでは、LCモデルの残差構造を解析し、その構造を踏まえたLCモデルの拡張であるLC-VARモデルを新たに提案する。併せて、LC-VARモデルの年金債務評価への応用例を示す。

2. LCモデルの概要と残差

(1) LCモデル

年齢 x についての平均的な対数死亡率を表すパラメータ α_x 、年 t についての死亡の一般的な水準を表すパラメータ(死亡指数) κ_t 、 κ_t に係る年齢別パラメータ β_x とし、中央死亡率を $m_{x,t}$ 、 $\varepsilon_{x,t}$ を残差項とすると、LCモデルは次式の通り表される。

$$\ln m_{x,t} = y_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (2.1)$$

$$\kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \omega_t \quad (2.2)$$

κ_t にはARIMAモデル等の時系列モデルが適用され、それにより期間の経過に伴う死亡率の低下傾向を表せることがLCモデルの特徴の1つとなっている。上式(2.2)はトレンドモデルを適用した場合を表し、 λ はトレンドを表すパラメータ、 ω_t は残差項である。パラメータ推定にあたっては、識別可能とするため $\sum \beta_x = 1, \sum \kappa_t = 0$ の制約が置かれる。

(2) LCモデルの推定と残差

年齢別死亡率の分散は、高齢死亡率等を踏まえれば不均一であると考えられるため、LCモデルのパラメータは、観察死亡率 $D_{x,t}$ がポアソン分布に従うとして最尤推定した。死亡数等のデータは、カリフォルニア大学とマックスプランク人口研究所等が共同で構築しているHuman Mortality Database (HMD) の1971-2009年の男・死亡数を用いた。年齢と時代(期間)を軸に取った残差局面は図1の通りである。残差局面にはうねりのようなものが観察され、LCモデルでは捉えきれない要因がある可能性がある。

Willeits(2004)は、英国の死亡率と同様、日本の死亡率においても生年コーホート別の死亡率改善効果が見られるとしているが、Ishii(2008)

は、死亡が遅延する効果があると考え LCモデルを修正し、日本の将来推計人口へ利用している。

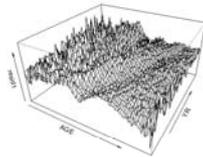


図1 LCモデルの残差 (男・1971-2009年)

LCモデルの残差には、図2、図3のような相関が見られる。また、生年コーホート別の残差系列は、図4の通り、1931年生れは対象期間にわたり継続して正、1921年生れは継続して負となっているが、その他の生年コーホートについては必ずしもそのような推移となっていない。

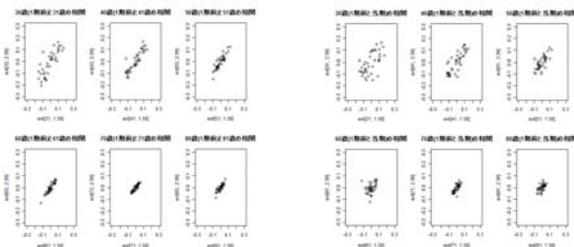


図2 1期前の1歳下の年齢の残差との相関

図3 1期前の同年齢の残差との相関

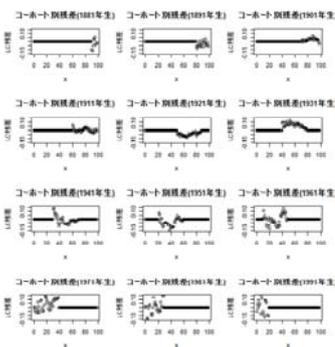


図4 LCモデルの生年コーホート別の残差系列

3. 既存モデル

コーホート効果を考慮した既存モデルとして、以下のものがある。

(1) Renshaw and Heberman (RH) モデル

LCモデルを拡張しコーホート効果を織り込んだ以下のRHモデルが提案されている。コーホート効果を表す生年コーホート別のパラメータを l_c 、 l_c に係る年齢別パラメータを $\beta_x^{(2)}$ とし、パラメータ推定は、識別可能とするため、一定の条件が置かれる。

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t + \beta_x^{(2)} l_{c,t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (3.1)$$

(2) APCモデル

APCモデルはLCモデルより前に開発され、医療統計や社会調査等において利用されてきた。APCモデルは、総平均を年齢の主効果に組み入れ、以下の通り記述される。パラメータ推定にあたっては、識別可能とするため、一定の条件が置かれる。

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t + l_c + \varepsilon_{x,t} \quad (3.2)$$

4. LC-VARモデルの策定

LCモデルの残差の相関及び生年別の残差系列等を踏まえ、以下のLC-VARモデルを策定した。

$$M_t = A_x + B_x \cdot \kappa_t + Z_t$$

$$M_t = \begin{bmatrix} \ln m_{0,t} \\ \ln m_{1,t} \\ \vdots \\ \ln m_{x,t} \\ \vdots \\ \ln m_{\omega,t} \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_x \\ \vdots \\ \alpha_{\omega} \end{bmatrix}, B_x = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_x \\ \vdots \\ \beta_{\omega} \end{bmatrix}, \kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \eta_t \quad (4.1)$$

$$Z_t = \sum_{L=1}^L C_L Z_{t-L} + W_t, C_L = \begin{bmatrix} C_{(0,0)}^L & \dots & C_{(0,\omega)}^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{(\omega,0)}^L & \dots & C_{(\omega,\omega)}^L \end{bmatrix}, Z_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{0,t} \\ \varepsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{x,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\omega,t} \end{bmatrix}, W_t = \begin{bmatrix} W_{0,t} \\ W_{1,t} \\ \vdots \\ W_{x,t} \\ \vdots \\ W_{\omega,t} \end{bmatrix}, W_{x,t} \sim N(0, \sigma_x), \text{cov}(W_{\mu,t}, W_{\nu,t}) = 0$$

5. 各モデルの推定結果と比較

前述のHMDの1951-2009年の男・死亡数(14-90歳)のデータについて、各モデルを最尤推定した場合のBIC、標準化誤差の分散は、下表の通りである。RHモデルの推定及びAPCモデルの推定は、Cairns et al (2009)と同様の識別条件を設定した。

対象データ	モデル	パラメータ数	BIC	標準化誤差の分散
1971-2009年 14-90歳 男	LC	191	32,000	8.51
	APC	229	25,802	6.34
	RH	381	14,843	2.29
	LC-VAR(1)	303	14,386	2.33
	LC-VAR(2)	378	13,870	1.96
1951-2009年 14-90歳 男	LC	211	93,469	17.55
	APC	269	90,511	17.14
	RH	421	34,001	3.98
	LC-VAR(1)	323	31,497	3.62
	LC-VAR(2)	398	32,048	3.62

表1 各モデルの推定結果

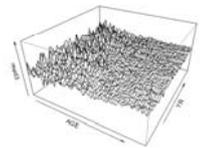


図5 LC-VAR(2) モデルの残差 (VAR対象年齢 16-90歳・1971-2009年)

6. LC-VARモデルの応用

LC-VARモデルを年金債務評価へ応用した場合の結果の一例(図6)を示す。年金種類や年金受給者の年齢によって、LCモデルと比較し年金現価の分布が相違する場合がある。

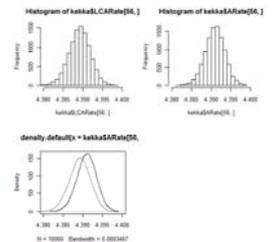


図6 年金債務(年金現価分布) 評価への応用

7. おわりに

LCモデルの残差を観察することにより、LC-VARモデルを提案し、良好な適合度が得られることを確認した。LC-VARモデルは、中短期的な将来死亡率予測とその不確実性評価に有用だけでなく、コーホート効果や時代効果の経時的な変動性をより適切に表現し得るモデルと言える。

文献

[1] Lee, R. D., L. Carter (1992). "Modeling and forecasting the time series of US mortality," *Journal of the American Statistical Association* 87: 659-671.
 [2] Renshaw, A. E., S. Heberman (2006). "A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors," *Insurance: Mathematics and Economics* 38: 556-570.
 [3] Cairns, A. J. G., D. Blake, K. Dowd, G. D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, I. Balevich (2009). "A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States," *North American Actuarial Journal* 13(1): 1-35.