

# CB制度下での商品先物の価格変動モデルの構築

青木 義充 総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士後期課程3年

## 【はじめに】

本報告の目的は、2009年5月に東京工業品取引所(東工取)が値幅制限に代わり導入したサーキットブレーカ(CB)制度のもとで市場リスクを計測するために価格変動モデルを構築することである。

CB制度とは、1日の価格変動の最大幅に上限を持たせる一方で、価格の大幅な変動時には取引を一時停止し、その後値段幅を拡張して取引を再開する制度である。結果的にはCB制度下での値段幅の上限は、旧制度下に比べて大きめに設定されており、制度導入後の商品先物価格のデータに1日における値段幅の上限に達した期間は皆無であった。換言すれば、以前であれば値幅制限に抵触していたような急激な価格変動が起こった場合でも、打ち切りなしに取引価格が観測されている。

そのため、CB制度下での収益率の分布は裾が重いものが観測されるようになった。具体例として2009年6月末から1年間の白金を挙げよう。図1には先物価格、図2には同期間の日次収益率の時系列プロットを示している。この期間は緩やかな上昇傾向を示しているが、2010年1月から2月、5月をはじめとして大きく下落している時期がある。収益率のプロットからは、上昇時の値は高々4%にとどまっているが、下降時には-7%を超える大きな値が記録されていることが分かる。さらに、図3の収益率のヒストグラムでは、下降時は上昇時に比べて裾が重い分布形をしていることが読み取れる。

商品先物取引のリスク管理では、価格の上昇時と下降時で異なる挙動を適切にとらえることが重要である。なぜならば、一般的なリスク管理の議論ではダウンサイドリスクの計測に焦点が絞られているが、商品先物取引で空売りをを行っている場合には上昇局面において損失が膨らむからである。そのため、本報告では価格の上昇・下降の両面を表現する価格変動モデルを構築する。

## 【モデル】

従来より、ファイナンス分野での収益率のモデル化では、正規分布、両側指数分布をはじめとした対称分布が扱われてきた。Kou (Kou, S. G. (2002) "A Jump Diffusion Model for Option Pricing". *Management Sci.* 48 1086-1101.) は、両側指数分布を非対称問題に適用できるように拡張した。具体的には、 $t$ 時点の日次収益率を  $x_t$  としたときに、次のようにモデル化する。

$$p_1\theta_1 \exp(\theta_1 x_t) I_{N_1}(x_t) + p_2\theta_2 \exp(-\theta_2 x_t) I_{N_2}(x_t). \quad (1)$$

ただし、 $p_1, p_2 > 0$ ,  $p_1 + p_2 = 1$  である。また、 $I_A(x)$  は指示関数であり、 $x \in A$  のときは1、その他の場合には0をとる。なお、上昇・下降の場合は次の通りである。

$$N_1 = \{x_t | x_t < 0\}, \quad \text{and} \quad N_2 = \{x_t | x_t \geq 0\}.$$

本稿では、(1)をさらに一般化し、上昇時と下降時で異なる分布を扱う。具体的には次のように定式化する。

$$p_1 f_1(x_t | \Theta_1) \times I_{N_1}(x_t) + p_2 f_2(x_t | \Theta_2) \times I_{N_2}(x_t). \quad (2)$$

ここで、上昇時、下降時の確率密度関数は、それぞれ

$$\int_{-\infty}^0 f_1(x | \Theta_1) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} f_2(x | \Theta_2) dx = 1$$

である。ただし、 $\Theta_k$  はそれぞれの確率分布のパラメタの集合である。

いま、下降時の観測数を  $n_1$ 、上昇時のものを  $n_2$  とする。このとき、標本尤度関数は(2)を用いると以下のように表せる。

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \prod_{x_t \in N_1} f_1(x_t | \Theta_1) \prod_{x_t \in N_2} f_2(x_t | \Theta_2). \quad (3)$$

本報告で扱うモデルは、全て(2)、(3)で記述することができる。

## 【推定方法】

本報告では、 $x_t$  に対し次の4つのモデルを当てはめる。

### 1. 対称分布モデル

- 正規分布:  $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-x_t^2/(2\sigma^2)\}$ .
- 両側指数分布:  $\theta \exp(-\theta |x_t|)$ .

### 2. 非対称分布モデル

- 指数分布 - 指数分布: (Kouモデル(1)と同等).
- 指数分布 - 正規分布:

$$p_1\theta_1 \exp(\theta_1 x_t) I_{N_1}(x_t) + 2p_2 \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_t^2}{2\sigma^2}\right) I_{N_2}(x_t).$$

それぞれの未知パラメタの推定はMCMCを採用した。

また、パラメタの事前分布はそれぞれ以下の通りである。観測に占める下降の割合  $p_1$  の事前分布をベータ分布とする。また、指数分布のパラメタ  $\theta$  の事前分布をガンマ分布とし、正規分布の分散  $\sigma^2$  の事前分布を逆ガンマ分布とする。

サンプリングの手順は以下の通りである。正規モデルは  $\sigma^2$  のみ、両側指数モデルは  $\theta$  のみがサンプリング対象である。Kouモデルの場合は  $p_1, \theta_1, \theta_2$  の順にサンプリングし、指数分布 - 正規分布モデルの場合は  $p_1, \theta_1, \sigma^2$  の順にサンプリングした。

なお、実際の推定アルゴリズムでは、それぞれ10,000回試行し、はじめの2,000回を除いた残りの8,000回の平均値を推定値とした。また、モデル選択基準としてDIC (Deviance Information Criterion) を計算した。

## 【結果】

表には、各モデルのDICの値とパラメタ推定の結果を記した。DICによれば、指数分布-正規分布(Exp-Normal)モデルのあてはまりがもっとも良い。ここで、あてはまりの良さを確認するため、図4に各モデルのQQプロットを示した。下降時は裾が重いために、正規分布のあてはまりが悪く、指数分布のほうが良い。一方で、上昇時は裾が軽く、指数分布よりも正規分布のあてはまりが良いことが示される。

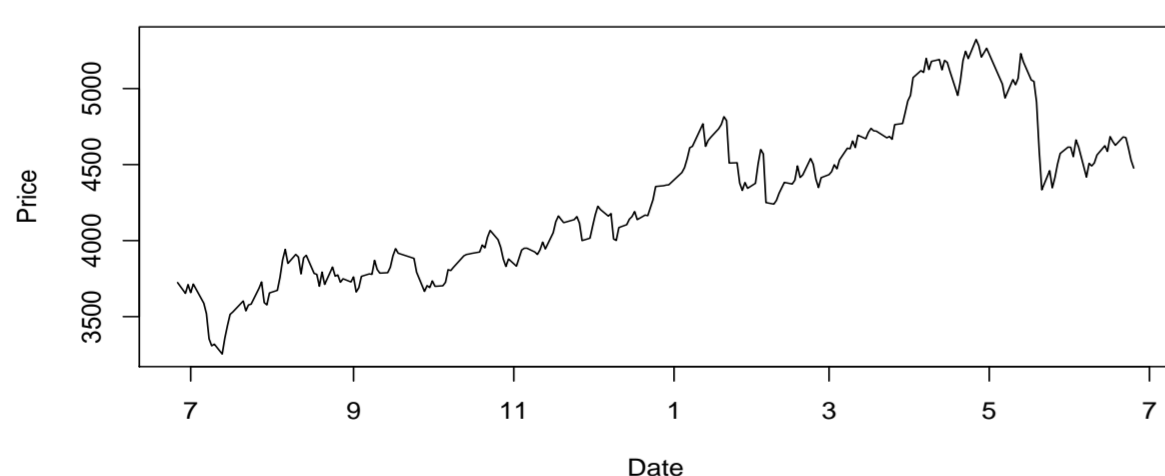


図1：白金の価格

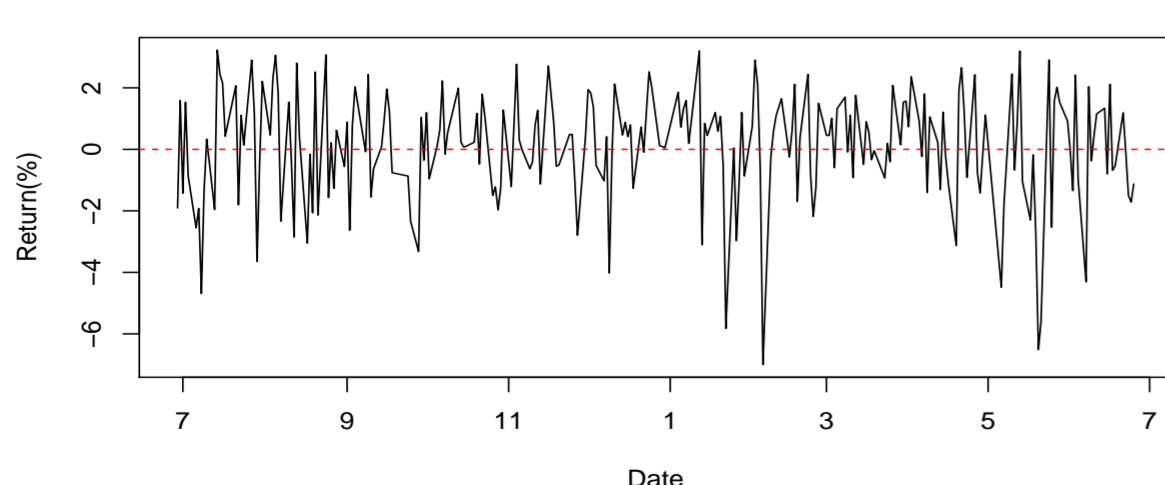


図2：白金の日次収益率

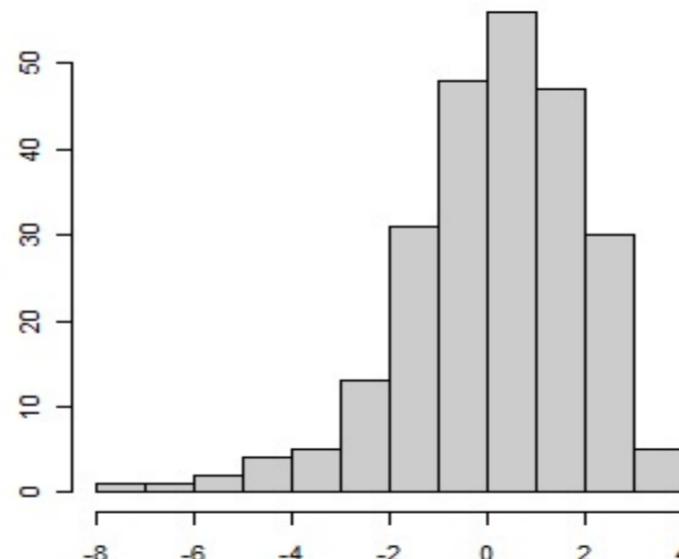


図3：白金の日次収益率のヒストグラム

Model	DIC				
		$\sigma^2$	$\theta$	$p_1$	$p_2$
Normal	1461.232	3.264			
double-exp	1479.506	0.718			
Exp-Normal	1432.778	0.659	2.567	0.427	0.573
Exp-Exp (Kou model)	1471.729	0.660	0.772	0.429	0.571

表：パラメタ推定結果

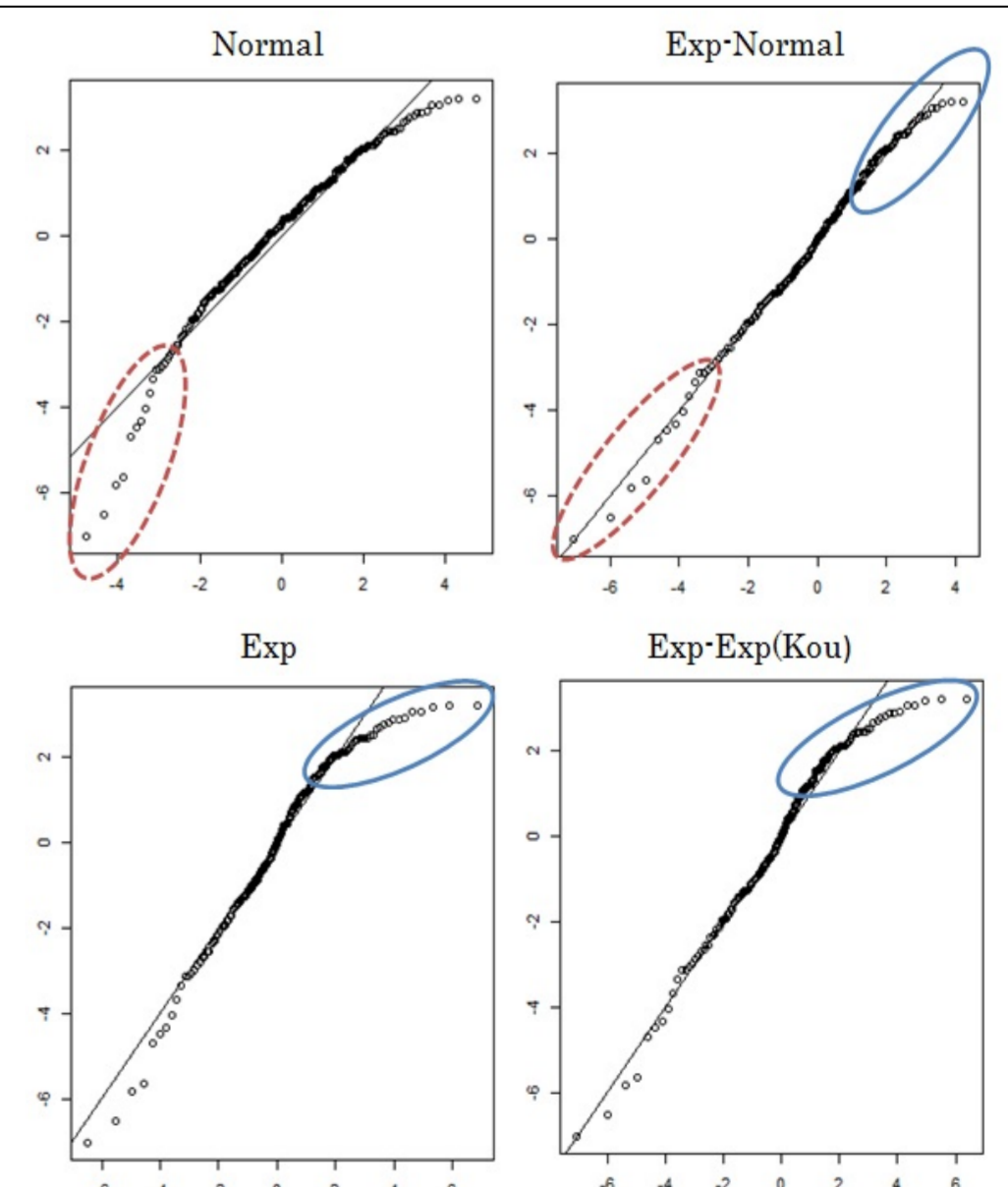


図4：4つのモデルのQQプロット