Likelihood for all equivalent models

2012年6月15日　統計数理研究所　オープンハウス

江口 真透　　数理・推論研究系　教授

要旨：

- 興味あるパラメータ ϕ が統計的汎関数 $\phi(G)$ で書ける場合を考察する. ここで G は母集団分布とする. 例えば ϕ はモーメント, 分位点, 生存関数, 回帰関数, 誤判別確率などが典型的な例である. G の代わりに経験分布 $\overline{G}$ を代入すれば推定量 $\tilde{\phi}=\phi(\overline{G})$ が得られる. $\tilde{\phi}$ をノンパラメトリック推定量と呼ぶ.
- 統計モデル $M=\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}):\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$ が仮定される場合は, ϕ はパラメトリックな推論が可能で, 最尤推定量 $\hat{\phi}$ が得られる. 生存解析でコックス回帰モデルの下で生存関数を推定する状況などが典型となる.
- 最尤推定量 $\hat{\phi}$ はノンパラメトリック推定量 $\tilde{\phi}$ よりも有効となる. しかし採用されたモデル M だけがデータに適合する唯一つのモデルとは限らない. Mは数学的な簡便さや従来の慣習からモデル M が選ばれることが多い. このことを考慮してモデル M と同等なモデルを全て許容する ϕ のロバストな信頼領域について考察する (Copas-Eguchi, 2010).

問題設定：

- 統計汎関数 $\phi(G)$ は推定関数 $a(\boldsymbol{x},\phi)$ によって $\phi(G)=\arg\operatorname{solve}_{\phi}\{\int a(\boldsymbol{x},\phi)dG(\boldsymbol{x})=0\}$ と定められるとする. Q分位点は $a(x,\phi)=Q-1_{(-\infty,\phi)}(x)$, 生存関数は $a(y,\phi)=\phi-1_{(t,\infty)}(y)$, 回帰関数は $a(y,\phi)=\phi-y$ と採られる.
- 統計汎関数$\phi(G)$をモデル M への制限して, $\phi(\boldsymbol{\theta})=\operatorname{argsolve}_{\phi}\{\int a(\boldsymbol{x},\phi)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{x}=0\}$を考えると$\phi$のプロファイル尤度は

$$L_f(\phi)=\sup_{\{\theta:\,\phi(\theta)=\phi\}}\sum_{i=1}^{n}\log f(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta})$$

と与えれ, ϕの最尤推定量は $\hat{\phi}=\phi(\hat{\theta})$と書ける. ここで $\hat{\theta}$はθの最尤推定量とする.

- モデルM に対して推定関数 $a(\boldsymbol{x},\phi)$の規格化 $E_{f(\cdot,\theta)}\{\frac{\partial}{\partial\phi}a(\boldsymbol{x},\phi)\}=1$ をすると,2つの推定量の漸近分散は

$$\operatorname{var}_A(\tilde{\phi})=\operatorname{var}_{f(\cdot,\boldsymbol{\theta})}(a),\quad \operatorname{var}_A(\hat{\phi})=E_{f(\cdot,\boldsymbol{\theta})}(a\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}I(\boldsymbol{\theta})^{-1}E_{f(\cdot,\boldsymbol{\theta})}(a\boldsymbol{s})$$

と表され, 相対効率を $\rho^2=\operatorname{var}_A(\hat{\phi})/\operatorname{var}_A(\tilde{\phi})$と書く.ここで $\boldsymbol{s}$はスコアー関数 $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ とする.

- モデル Mと同等な誤特定モデルの表現は

$$g_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\varepsilon)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\exp\{\varepsilon u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})-K(\varepsilon,\boldsymbol{\theta})\}$$

で得られ$M_{\varepsilon,u}=\{g_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\varepsilon):\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$は$M$の誤特定モデルとなる.ここで$u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$はモデル Mの直交法空間の単位球

$$\mathscr{U}=\{u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}):\mathrm{E}_{f(\cdot,\theta)}u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})=0,\ \mathrm{E}_{f(\cdot,\theta)}u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})^2=1,\ \mathrm{E}_{f(\cdot,\theta)}\{u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\}=0\}$$

の元とする.このようにgの $f(\cdot,\boldsymbol{\theta})$への乖離の大きさが εで,方向が $u(\cdot,\boldsymbol{\theta})$で与えられている. バイアスは

$$\phi(g_u)=\phi(\boldsymbol{\theta})+\varepsilon E_{f(\cdot,\boldsymbol{\theta})}(a,u)+O(\varepsilon^2)$$

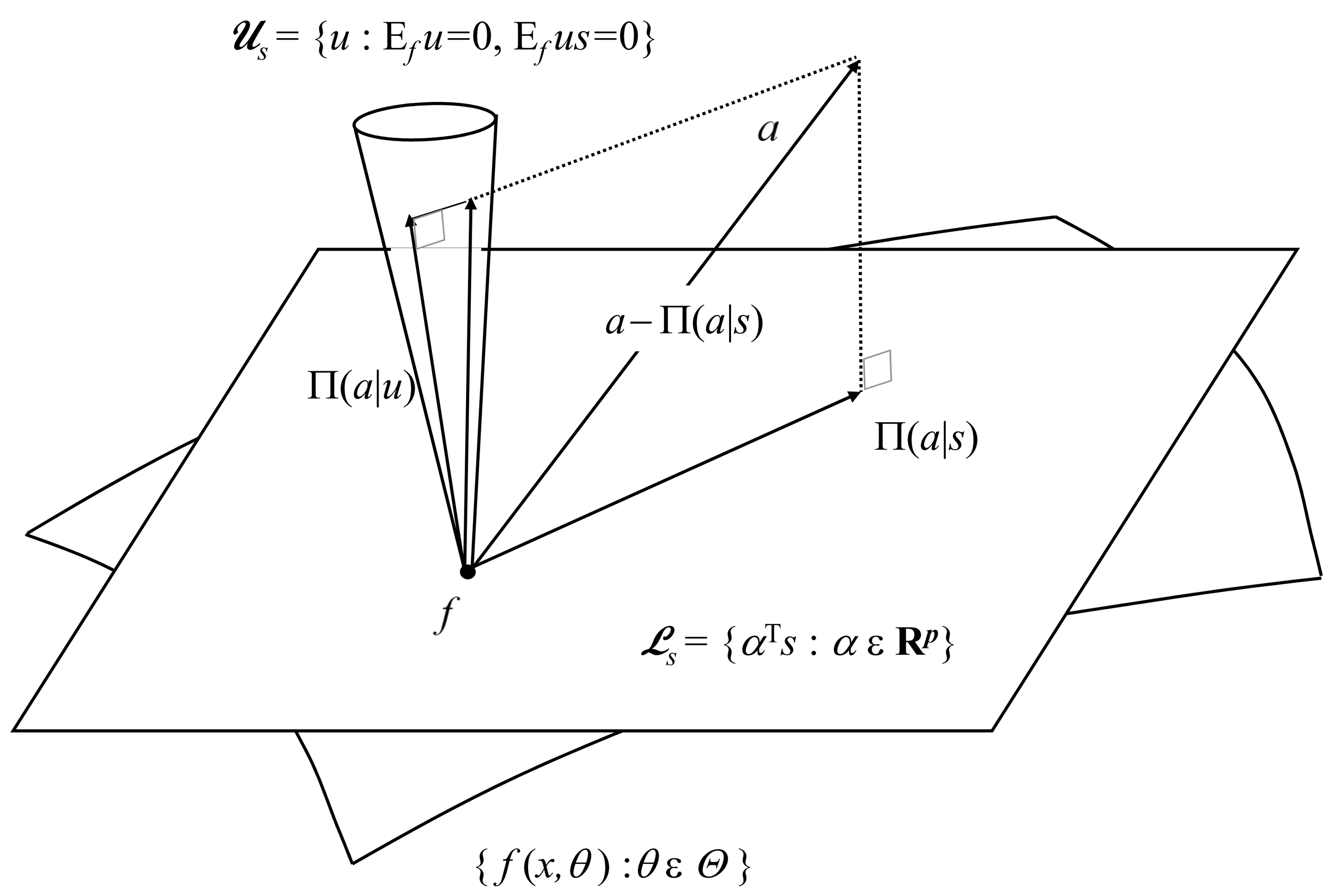
と展開されることに注意すると次の不等式が成立する.

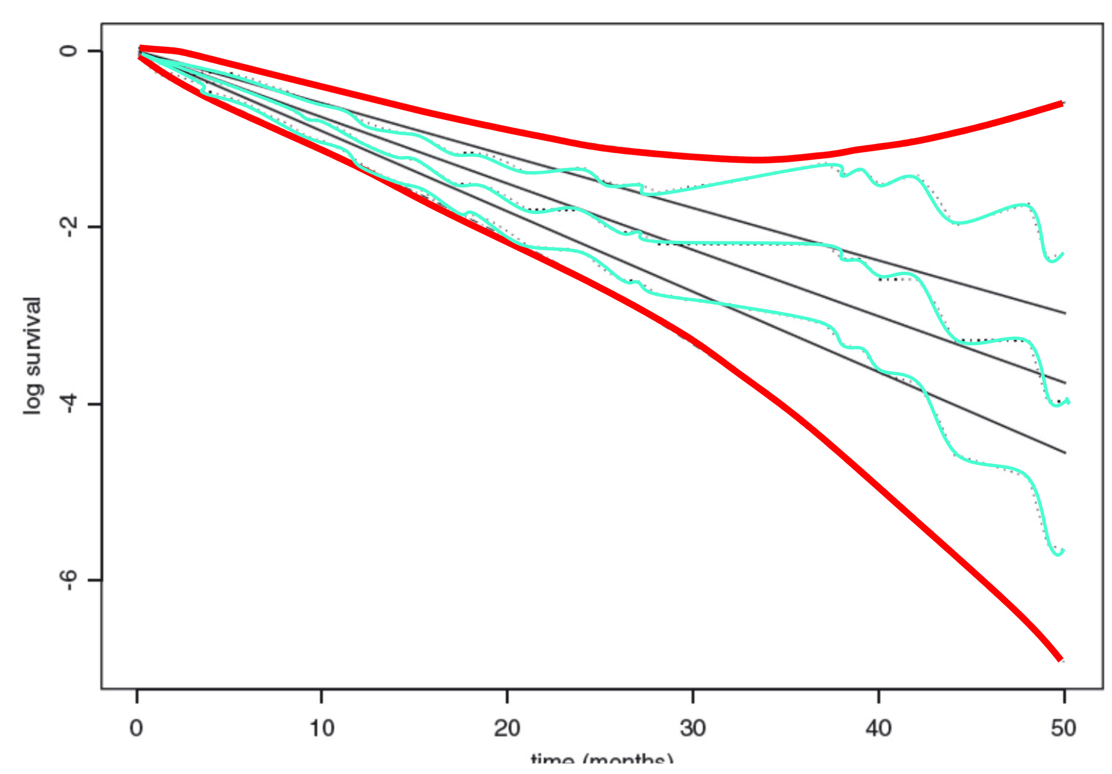
定理：

$$|\phi(g_u)-\phi(\boldsymbol{\theta})|\le\sigma_\phi\frac{1-\rho^2}{\rho^2}\quad(\forall u\in\mathscr{U})\quad \text{等号は } u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})=\frac{a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})-E(a\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}I(\boldsymbol{\theta})^{-1}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})}{\sigma_a\sqrt{1-\rho^2}}$$

- モデルMの仮定の下で漸近正規性から $L_f(\phi)=-\frac{1}{2}(\phi-\hat{\phi})^2/\operatorname{var}_A(\hat{\phi})$ と近似されるが, 全ての誤特定モデルを許容する対数尤度関数を $L_{\mathrm{ENV}}(\phi)=\sup_{u\in\mathscr{U}}L_{g_u}(\phi)$ は次のように陽に与えられるのでロバスト信頼領域が作れる.

$$L_{\mathrm{ENV}}(\phi)=-\frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{|\phi-\hat{\phi}|}{\operatorname{var}_A(\hat{\phi})}-z_\alpha\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)_+^2$$





$$\phi(\tau)=\log\frac{P(y>\tau\,|\,\text{treatment A})}{P(y>\tau\,|\,\text{treatment B})}$$

Standard
Nonparametric
Envelope