統計数理（2010）
第 58 巻 第 1 号 131–135

［研究ノート］

平滑化 Nelson-Aalen 推定量の一様収束率

西山 陽一[†]

（受付 2010 年 3 月 31 日；改訂 5 月 20 日；採択 5 月 20 日）

要　　旨

計数過程の積強度モデルにおいて，Ramlau-Hansen (1983, *Ann. Statist.*) は危険関数に対する平滑化 Nelson-Aalen 推定量の一様一致性を証明した．我々はこの結果を拡張し，一様一致性の収束率が $o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$ であることを証明する．ただし b_n はバンド幅である．証明には Nishiyama (2000a, *Ann. Probab.*) による ℓ^∞-空間値マルチンゲールの弱収束理論を用いる．

キーワード： カーネル推定量， 平滑化， Nelson-Aalen 推定量， 一様一致性.

1. 序

この論文は Aalen (1978) によって導入された計数過程の積強度モデル（multiplicative intensity model）を扱う．すなわち，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，計数過程 $\{N_t^n; t \in [0,T]\}$ の強度が

$$\alpha(t)Y_t^n$$

の形をしていることを仮定する．ここで $\alpha(t)$ は非確率的な非負可測関数であり，$\{Y_t^n; t \in [0,T]\}$ は非負予測可能過程である．Y^n の一般化逆数 Y^{n-} を

$$Y_t^{n-} = \frac{J_t^n}{Y_t^n}$$

によって定義する．ただし

$$J_t^n = 1\{Y_t^n \geq 1\}$$

とおいた上で $\frac{0}{0} = 0$ と約束する．Ramlau-Hansen (1983) は**平滑化 Nelson-Aalen 推定量**

$$\widehat{\alpha}^n(x) = \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) Y_t^{n-} dN_t^n$$

を $\alpha(x)$ の推定量として提案した．ここで K は適切なカーネル関数であるとし，$\{b_n\}$ はゼロに収束する定数列であるとする．彼は $E[\sup_{x\in[z_1,z_2]} |\widehat{\alpha}_n(x) - \alpha(x)|^2] \to 0$ が成り立つための十分条件を提示した．ただし $0 < z_1 < z_2 < T$ (Ramlau-Hansen, 1983 の Theorem 4.1.2 を見よ)．少々異なる条件のもとで Andersen et al. (1993) は，もしも $n^{-1/2}b_n^{-1} \to 0$ であるならば

$$\sup_{x\in[z_1,z_2]} |\widehat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = o_P(1) \tag{1.1}$$

であることを証明した．実際のところ，彼らは本質的には

$$\sup_{x\in[z_1,z_2]} |\widehat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = O_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$$

[†] 統計数理研究所：〒190–8562 東京都立川市緑町 10–3

を証明した（Andersen et al., 1993 の Theorem IV.2.2. の証明を注意深く見ると，そこにおいて Nelson-Aalen 推定量の弱収束理論を用いることによってこのことはわかる）．

我々はこの結果を次の形まで拡張する：もしも $nb_n^6 \to 0$ ならば

$$\sup_{x\in[z_1,z_2]} |\widehat{\alpha}^n(x)-\alpha(x)| = o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$$

が α についての緩い条件のもとで成り立つ．Andersen et al. (1993) による (1.1) の証明は単に Lenglart の不等式に基づくものに過ぎないが，我々は Nishiyama (2000a, 2000b) による ℓ^∞-空間値マルチンゲールに対する弱収束理論を，極限が退化している場合について適用する．

2. 結果

この論文の主結果は次の通りである．

定理 1. 一様カーネル $K(u)=1_{[-1/2,1/2]}(u)$ をとる．$0<z_1<z_2<T$ とせよ．

$$\sup_{t\in[0,T]} Y_t^{n-} = O_P(n^{-1}), \quad \sup_{t\in[0,T]} |J_t^n - 1| \to^p 0$$

を仮定する．α は $[0,T]$ 上で有界で，かつ $(0,T)$ 上で 2 回微分可能であって 2 次導関数 α'' が有界であるとする．もしも $nb_n^6 \to 0$ ならば，

$$\sup_{x\in[z_1,z_2]} |\widehat{\alpha}^n(x)-\alpha(x)| = o_P(n^{-1/2}b_n^{-1}).$$

注意 1. カーネル関数 K を他のものにとってくることも可能であるが，一様カーネルを選ぶと証明が簡単になる．

注意 2. $nb_n^6 \to 0$ という仮定は，例えばいわゆる最適バンド幅 $b_n = n^{-1/5}$ に対しては実際に成り立っている．

証明.

$$\alpha^{*n}(x) = \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) J_t^n \alpha(t)dt,$$
$$\widetilde{\alpha}^n(x) = \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) \alpha(t)dt$$

とおく．$\widehat{\alpha}^n(x) - \alpha^{*n}(x)$ は実際には確率積分

$$n^{1/2}b_n(\widehat{\alpha}^n(x)-\alpha^{*n}(x)) = M_T^{n,x} = \int_0^T H_t^{n,x}(dN_t^n - \alpha(t)Y_t^n dt)$$

であることに注意せよ．ただし

$$H_t^{n,x} = n^{1/2}K\left(\frac{t-x}{b_n}\right)Y_t^{n-}.$$

これから Nishiyama (2000a) の Theorem 3.2 を $\sup_x |M_T^{n,x}| \to^p 0$ を示すために適用していく．まず $\langle M^{n,x}\rangle_T \to^p 0$ であることは容易にわかるから，Lenglart の不等式より任意の有限次元マージナルが退化極限に確率収束することが従う：$M_T^{n,x} \to^p 0$.

次に Nishiyama (2000a) の条件 [PE] をチェックしよう．各 $\varepsilon>0$ に対し，$z_1 = x_0^\varepsilon < x_1^\varepsilon < \cdots < x_{N(\varepsilon)}^\varepsilon = z_2$ を $x_k^\varepsilon - x_{k-1}^\varepsilon \le \varepsilon^2$ となるように選ぶ．このことは $N(\varepsilon) \le \text{constant}\cdot\varepsilon^{-2}$ を満たし

つつ可能であるから，エントロピー条件 $\int_0^1 \sqrt{\log N(\varepsilon)}d\varepsilon < \infty$ は実際に満たされている．もし $\varepsilon^2 \le b_n$ ならば

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sup_{x,y\in[x_{k-1}^\varepsilon, x_k^\varepsilon]} |H_t^{n,x} - H_t^{n,y}|^2 \alpha(t) Y_t^n dt \\
&\quad \le n \sup_{t\in[0,T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot \int_0^T \{1_{[x_{k-1}^\varepsilon - b_n/2, x_k^\varepsilon - b_n/2]}(t) + 1_{[x_{k-1}^\varepsilon + b_n/2, x_k^\varepsilon + b_n/2]}(t)\} dt \\
&\quad \le n \sup_{t\in[0,T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot 2\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

他方，もし $\varepsilon^2 > b_n$ ならば

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sup_{x,y\in[x_{k-1}^\varepsilon, x_k^\varepsilon]} |H_t^{n,x} - H_t^{n,y}|^2 \alpha(t) Y_t^n dt \\
&\quad \le n \sup_{t\in[0,T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot \int_0^T 1_{[x_{k-1}^\varepsilon - b_n/2, x_k^\varepsilon + b_n/2]}(t) dt \\
&\quad \le n \sup_{t\in[0,T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot (\varepsilon^2 + b_n) \\
&\quad \le n \sup_{t\in[0,T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot 2\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

よって Nishiyama (2000a) の条件 [PE] は満たされている．Lindeberg 条件 [L1] をチェックするのは易しい．実際 Lyapunov 条件，すなわちある $\delta > 1$ に対して Nishiyama (2000a) の記号でいえば $|\overline{W}^n|^\delta * \nu_{\tau^n}^n \to^p 0$ が満たされていることが，例えば $\delta = 3$ に対してチェックできる．よって $\sup_x n^{1/2} b_n |\widehat{\alpha}^n(x) - \alpha^{*n}(x)| \to^p 0$ であることが証明できた．

仮定 $\sup_t |J_t^n - 1| \to^p 0$ により $P(\sup_x |\alpha^{*n}(x) - \widetilde{\alpha}^n(x)| > 0) \to 0$ を得る．最後に，テイラー展開により

$$\begin{aligned}
n^{1/2} b_n |\widetilde{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| &= n^{1/2} b_n \left| \int_{-1/2}^{1/2} K(u)(\alpha(x + b_n u) - \alpha(x)) du \right| \\
&\le n^{1/2} b_n \int_{-1/2}^{1/2} K(u) |\alpha''(x + b_n \tilde{u}_n)| |b_n u|^2 du \\
&\le n^{1/2} b_n^3 \int_{-1/2}^{1/2} u^2 K(u) du \cdot \sup_y |\alpha''(y)| \\
&= O(n^{1/2} b_n^3) \quad x \text{ に関し一様に}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\tilde{u}_n$ は $[-1/2, 1/2]$ の中の点である．これで証明が終わった．□

謝　辞

匿名査読者には，初稿に含まれていた誤りを指摘していただいた．この研究は日本学術振興会からの科学研究費補助金・基盤研究(C)，21540157 によって支援されたものである．

参 考 文 献

Aalen, O. O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting processes, *The Annals of Statistics*, **6**, 701–726.

Andersen, P. K., Borgan, Ø., Gill, R. D. and Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.

Nishiyama, Y. (2000a). Weak convergence of some classes of martingales with jumps, *The Annals of Probability*, **28**, 685–712.

Nishiyama, Y. (2000b). *Entropy Methods for Martingales*, CWI Tract, **128**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

Ramlau-Hansen, H. (1983). Smoothing counting process intensities by means of kernel functions, *The Annals of Statistics*, **11**, 453–466.

Uniform Rate of Convergence of Smoothed Nelson-Aalen Estimator

Yoichi Nishiyama

The Institute of Statistical Mathematics

In the multiplicative intensity model for counting processes, Ramlau-Hansen (1983, *Ann. Statist.*) derived the uniform consistency of the smoothed Nelson-Aalen estimator for the hazard function. We extend this result to the case where the rate of uniform consistency is $o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$ where b_n is the bandwidth, by using the weak convergence theory for ℓ^∞-valued martingales given by Nishiyama (2000a, *Ann. Probab.*).

Key words: Kernel estimator, smoothing, Nelson-Aalen estimator, uniform consistency.